

УДК 621.03.9

В. А. Андронов¹, д.т.н., профессор, проректор (ORCID 0000-0001-7486-482X)
М. М. Дивизинюк², д.ф.-м.н., профессор, нач. отдела (ORCID 0000-0002-5657-2302)
Е. В. Иванов¹, преподаватель (ORCID 0000-0001-6781-9238)
Е. А. Рыбка¹, д.т.н., ст. исслед., зам. нач. центра – нач. отд. (ORCID 0000-0002-5396-5151)
А. П. Сулима², ведущий инженер (ORCID 0000-0002-7832-6030)

¹Национальный университет гражданской защиты Украины, Харьков, Украина

²Государственное учреждение «Институт геохимии окружающей среды
Национальной академии наук Украины», Киев, Украина

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБНАРУЖЕНИЯ ОБЪЕМНЫХ АНТРОПОГЕННЫХ ЗАГРЯЗНЕНИЙ ВОДЫ

Разработана математическая модель обнаружения объемных антропогенных загрязнений воды. Анализ физической модели обнаружения загрязнения в водной среде, показал, что при внесении объемно загрязнения в водную среду изменяются ее упругие (плотностные) характеристики, влияющие на величину скорости распространения звука, измеряемую прямыми методами. Отмечается, что измерения скорости звука, выполняемые косвенными методами, инвариантны наличию антропогенного загрязнения. При этом разница в измерениях, выполненных прямыми и косвенными методами, будет тем больше, чем выше концентрация антропогенных загрязнений. Начальными условиями для разработки математической модели являются непрерывность измеряемых величин, погрешность сравнения которых определяется точностью измерений скорости звука прямыми и косвенными методами. Априорная вероятность получения измеряемого результата и совместная вероятность появления истинного значения величины с измеряемым параметром подчиняются нормальному закону распределения. При этом граничные условия определяются диапазоном изменения значений измеряемой величины от 0,1 до 20 м/с, а также погрешностью таких измерений от 10^{-3} до 10^{-1} м/с. Математическая модель обнаружения загрязнений воды базируется на совокупности двух аналитических зависимостей. Первая зависимость характеризует величину разности одновременно выполненных измерений скорости звука прямыми и косвенными методами. Вторая – характеризует количество получаемой информации в измеряемой величине за определенный промежуток времени, которое зависит от отношения дисперсии измеряемой величины к дисперсии её измерения. Теоретические исследования предложенной модели в целом подтверждают, что наличие антропогенного загрязнения в водной среде приводит к уменьшению численного значения скорости звука, измеренной прямыми методами. Показано, что оптимизация системы обнаружения загрязнений по критерию максимального правдоподобия в этом случае сводится к минимизации соответствующего квадратичного функционала путем выбора оптимальных сигналов и алгоритмов их обработки.

Ключевые слова: чрезвычайная ситуация, антропогенное объемное загрязнение, водная среда, модель, обнаружение

1. Введение

Предотвращение чрезвычайных ситуаций, вызванных попаданием в водную среду антропогенных загрязнений, является актуальной научно-практической проблемой. Ее призваны решать руководители предприятий и государственных администраций, работники производств и научно-образовательных учреждений, граждане Украины и лица без гражданства, проживающие на территории Украины [1]. Своевременное обнаружение антропогенных факторов, воздействующих на водную среду, позволяет принимать меры по управлению предприятием и технологическими процессами с максимальной эффективностью. Это, в свою очередь, обеспечивает стабильную экологическую обстановку без возникновения аварий и катастроф техногенного характера [2]. Создание эффективных технических средств обнаружения антропогенных загрязнений рек и озер, водохранилищ

и других внутренних водоемов, прибрежных морских вод не представляется возможным без использования моделей обнаружения антропогенных объемных загрязнений, попадающих в воду [3]. Объективная сложность антропогенного загрязнения вод, а также необходимость эффективного обнаружения таких загрязнений порождают необходимость совершенствования методов и способов обнаружения антропогенных загрязнений воды.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Современное состояние водных объектов Украины подвергаются интенсивному антропогенному загрязнению, что приводит к ухудшению экологического состояния [4]. Основными источниками загрязнения водоемов являются атмосферные осадки, бытовые сточные воды, промышленные сточные воды; сточные воды сельскохозяйственных предприятий.

В настоящее время изменилось как количество загрязнителей воды так и их состав. Стандартные методы оценки степени загрязнения воды [5] предполагают исследования следующих параметров: температура, цвет, проводимость, мутность, общее содержание твердых веществ, общее количество растворенных твердых веществ, рН, щелочность, хлориды, общая жесткость, растворимость кислорода, биологическая потребность в кислороде. Такие методы требуют значительных материальных и трудовых затрат при длительной экспозиции.

В работе [6] сделаны попытки усовершенствования системы нормирования и контроля антропогенного загрязнения поверхностных вод. Подход [7] основан на методологии биотестирования, позволяет получить интегральную характеристику токсического воздействия на функционирование водных организмов совокупности загрязняющих веществ. Недостатком данного подхода является невозможность нормирования и контроля соблюдения установленных ограничений для большого количества загрязняющих веществ.

В работе [8] применены многомерные статистические методы для оценки качества воды. Показано, что основными антропогенными загрязнителями воды есть фосфор, железо и гербициды. Однако метод требует значительных затрат по времени (наблюдения проводятся на протяжении 18 месяцев), что указывает на его низкую оперативность.

В работе [9] концентрации микроэлементов (кадмий, хром, медь, кобальт, железо, марганец, никель, свинец, ртуть, цинк) были определены с помощью атомно-абсорбционного спектрофотометра. Метод основывается на измерении поглощения резонансного излучения свободными атомами, находящимися в газовой фазе. Основным недостатком метода является его низкая применимость для водной среды.

В [10] представлены результаты исследований переходной чувствительности с помощью океанской модели биогеохимического элементного циклирования (ВЕС) к увеличению антропогенного атмосферного осаждения неорганического азота и растворимого железа. Однако такие исследования сопряжены со сложностями биогеохимических измерений.

В исследовании [11] использовали океанографические знания вместе с количественными методами. Данный метод охватывает ограниченный интервал видов антропогенного загрязнения, что делает его малоприменимым.

Многовариантные статистические методы, такие как кластерный анализ, анализ основных компонентов и факторный анализ, применялись для оценки и

интерпретации набора данных о качестве воды в работе [12]. При этом статистические методы позволяют только выдвигать гипотезы, которые требуют подтверждений, что делает такие методы малоэффективными.

В работе [13] для оценки уровня и последствий антропогенного воздействия на речные экосистемы проводился мониторинг гидрохимических показателей. Уровень загрязнения воды оценивался сопоставлением фактических значений отдельных показателей с обобщенными критериями качества воды. При этом значительная погрешность значительно влияет на уровень такой оценки.

Метод [14] основан на математической обработке данных статистических наблюдений и может быть использован при разработке природоохранных программ, направленных на снижение антропогенной нагрузки на реки. Недостатком метода является недостаточная точность, связанная с необходимостью увеличения объема наблюдений и повышения контроля над объемами и качеством сточных вод водопользователей.

Дистанционное зондирование [15] облегчает пространственную идентификацию потенциала источника загрязнения воды и помогает в качественной оценке уровня загрязнения водных объектов. Однако реализация данного метода предполагает использование летальных аппаратов, оснащенных съемочной аппаратурой, что в значительной мере ограничивает его применимость.

Перспективным направлением в области оперативного контроля наличия антропогенных загрязнений воды является использования измерителей скорости звука в водной среде. В [16] приведены измерения скорости звука в жидкой воде методом импульсного вынужденного рассеяния в ячейке высокого давления с сапфировыми окнами от -10 до 100 °С и давлениях до 700 МПа. Существенным недостатком является невозможность использования метода в реальных условиях наблюдений.

Концепция [17] построения идеального гидрофизического измерителя параметров термодинамического состояния случайно-неоднородных жидкостей, которая заключается в непрерывном синхронном измерении показателя преломления света, скорости звука и давления в единичном объеме среды. При этом имеет место значительная погрешность прямого и косвенного измерения параметров термодинамического состояния морской среды, что значительно влияет на эффективность такого измерителя.

В [18] рассматривает взаимосвязь скорости звука и коэффициента поглощения звука в воде. Дана количественная оценка дополнительной систематической погрешности измерения скорости звука, обусловленной поглощением звука. Однако поглощение обладает относительно малым влиянием на измеряемую скорость звука, а рассмотренный эффект может быть одной из причин расхождения многочисленных эмпирических формул скорости звука в пресной и морской воде.

В работе [19] проведен анализ состояния и перспективы развития в области обеспечения единства измерений скорости звука в водной среде. Не раскрыта проблема отсутствия эталона измерений и методов его определения.

В этой связи, нерешенной частью проблемы является отсутствие математического описания процесса обнаружения объемного антропогенного загрязнения в водной среде, посредством изменения скорости распространения звука под воздействием таких загрязнений.

3. Цель и задачи исследования

Целью исследования является разработка математической модели обнаружения объемных антропогенных загрязнений, попадающих в воду.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- выполнить анализ физической модели обнаружения объемного антропогенного загрязнения в водной среде;
- обосновать начальные и граничные условия, необходимые при разработке математической модели обнаружения объемного антропогенного загрязнения воды;
- обосновать математическую модель обнаружения объемных антропогенных загрязнений, попадающих в воду;
- выполнить теоретическое исследование разработанной математической модели обнаружения объемных антропогенных загрязнений воды.

4. Анализ физической модели обнаружения объемного антропогенного загрязнения в водной среде

Анализ модели обнаружения объемного антропогенного загрязнения выполним на характерном примере загрязнения морской воды. В работах [3] показано, что увеличение солёности или гидростатического давления приводит к увеличению плотности морской воды. При этом известно, что увеличение температуры воды вызывает возрастание скорости звука в воде. Это связано с увеличением значения модуля объемной упругости воды. Однако теоретически с увеличением температуры воды ее плотность должна уменьшаться и скорость звука должна падать. Данное противоречие объясняется тем, что возрастание модуля объемной упругости воды M подчиняется нелинейным зависимостям и происходит гораздо быстрее, чем увеличивается плотность морской воды, то есть

$$M = K \cdot \rho_0^2(1 + B), \quad (1)$$

где K – коэффициент линейной пропорциональности; ρ_0 – плотность; B – положительный эмпирический коэффициент.

С учетом (1) скорость звука в воде будет определяться величиной

$$C = \sqrt{\frac{M}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{K \cdot \rho_0^2(1 + B)}{\rho_0}} = \sqrt{K \cdot \rho_0(1 + B)}. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что скорость звука в морской воде в основном определяется ее плотностью. При этом эта зависимость носит нелинейный характер. Рассмотрим влияние объемных гипотетических антропогенных загрязнений, находящихся в морской воде на её плотность. Под гипотетическими загрязнениями будем понимать загрязнения, которые не растворяются в морской воде. Его частицы или мелкомасштабные неоднородности в виде пузырьков газа, фолликул нефти, мелко дисперсионных взвесей и другое. Обычно они имеют одинаковую плотность и равномерно распределены в единичном объеме, как показано на рис. 1.

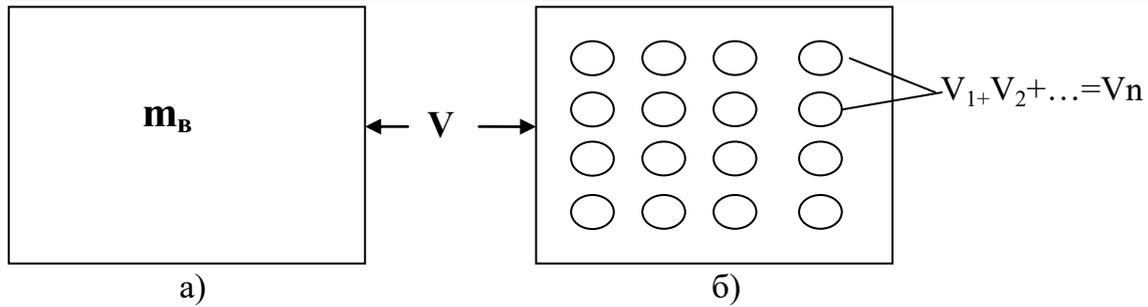


Рис. 1. Единичный объем воды при отсутствии и наличии загрязнений: а – чистая вода; б – загрязненная вода

Пусть единичный объем V воды имеет массу m . Тогда плотность воды единичного объема V будет определяться величиной

$$\rho_B = \frac{m_B}{V} . \quad (3)$$

Добавление в этот единичный объем гипотетического загрязнения вызовет в нем соответствующие изменения. Частицы примеси в единичном объеме V вытеснят определенное количество воды, объем которой равен объему добавленного загрязнения. Масса воды в единичном объеме уменьшится на величину, равную произведению плотности воды на объем загрязнения. Тогда плотность рассматриваемого единичного объема воды при наличии гипотетического загрязнения должна уменьшиться на соответствующую величину и определяться

$$\rho = \frac{m_B - V_n \cdot \rho_B}{V} = \frac{\rho_B (V - V_n)}{V} . \quad (4)$$

Полученная в результате гипотетического загрязнения единичного объема воды плотность будет иметь меньшую величину, чем плотность воды без загрязнения. Это вызовет уменьшение скорости звука в рассматриваемом единичном объеме водной среды. Чем больше будет концентрация загрязнения, тем меньше будет скорость звука в воде. Следовательно, мелкомасштабные неоднородности в виде загрязнений уменьшают скорость распространения звука в водной среде, причем тем больше, чем выше концентрация загрязнений.

Известно [20], что известные методы измерения скорости звука в водной среде, разделяется на две группы: прямые и косвенные. Первая группа методов основана на классическом определении скорости C (первой производной по времени от пройденного пути L), то есть

$$C = \frac{dL}{dt} . \quad (5)$$

Поэтому эта группа методов базируется на измерении длины пути и времени. Прямые методы измерения реализуются обычно непосредственно в определенной точке водной среды. При этом используются измерители скорости звука, в которых обычно реализуются фазовый, резонансный, дифракционный, импульсный, импульсно-циклический методы измерений скорости звука. Такие измерители позво-

ляют измерять скорость звука с относительной погрешностью 0,005–0,01 м/с.

Группа косвенных методов измерения скорости звука основывается на том, что скорость звука – это вторичная гидрологическая характеристика, являющаяся некоторой функцией температуры T , солености S и гидростатического давления P

$$C = f(T; S; P) . \quad (6)$$

Существующие океанологические приборы с высокой точностью позволяют измерять температуру, соленость морской воды, а также гидростатическое давление на глубине погружения этих приборов. Аналитический расчет скорости звука для каждой конкретной точки пространства производится на основе известных зависимостей по результатам измерения соответствующих параметров. В настоящее время разработаны и широко применяются косвенные измерители скорости звука, как автономные одноразовые приборы типа СТД зондов, так и комплексные многоразовые измерители, в которых расчет скорости звука производится встроенными цифровыми процессорами.

Если в ограниченном единичном объеме водной среды произвести измерения скорости звука прямым и косвенным методами, то полученные значения должны совпадать. В первом случае скорость определяется по формуле (2) и представляет собой значение скорости распространения звука, как свойство упругой среды, которое будет изменяться, если будут изменяться упругие (плотностные) характеристики водной среды, например, вследствие антропогенного загрязнения. Во втором случае, скорость – это функция температуры, солености и гидростатического давления (6), которая будет рассчитываться в соответствии с эмпирическими формулами. В зависимости от изменения значений этих характеристик она будет изменяться, увеличиваться с их ростом и наоборот. Если термодинамические и гидростатические параметры водной среды останутся неизменными, то и значение скорости звука, вычисленное косвенными методами, также не изменится даже в случае внесения в воду антропогенного загрязнения.

Таким образом, анализ физической модели обнаружения объемного антропогенного загрязнения водной среды показывает, что при внесении антропогенного объемного загрязнения в водную среду будут изменяться ее упругие (плотностные) характеристики, которые будут фиксироваться измерителями скорости звука, реализующими прямые методы. При этом измерения скорости звука, выполняемые косвенными методами, не будут реагировать на наличие антропогенного загрязнения. Разница в измерениях, выполненных прямыми и косвенными методами, будет тем больше, чем выше концентрация антропогенного загрязнения.

5. Обоснование начальных и граничных условий для математической модели обнаружения объемного антропогенного загрязнения

Обнаружение объемного антропогенного загрязнения водной среды предлагается осуществлять на основе различия информации, получаемой прямыми и косвенными методами измерения скорости звука в водной среде. Поэтому для разработки модели обнаружения загрязнений необходимо обосновать начальные и граничные условия, исходя из информационных возможностей рассматриваемых методов измерения [21].

В синтактике информационные сообщения рассматриваются как символы, абстрагированные от ценности самой информации. При синтаксическом анализе

информация определяется как мера уменьшения неопределенности информации о каком-либо предмете. Если H_1 – исходная (априорная) неопределенность, а H_2 – остаточная (апостериорная) неопределенность, то содержащуюся в передаваемом сообщении информацию можно представить

$$I = H_1 - H_2. \quad (7)$$

Для оценки степени неопределенности измерительной информации на синтаксическом уровне используют, главным образом, две математические меры: логарифмическую и вероятностную [21]. В первом случае, чем больше уровней N имеет измеряемая величина, тем труднее определить её истинное значение. Значит исходная неопределенность до измерений возрастает с увеличением числа N и характеризуется логарифмической функцией от N , а неопределенность об истинном значении величины оценивается логарифмической функцией от n – числа возможных значений величины после измерений, то есть соответственно

$$\log_a N, \quad H_2 = \log_a n. \quad (8)$$

Очевидно, что $n < N$, а $n=1$ только при идеальном измерении в случае нулевой погрешности, тогда информация, полученная в результате рассматриваемых измерений

$$I = H_1 - H_2 = \log_a N - \log_a n = \log_a \frac{N}{n}. \quad (9)$$

При $a=2$ единица неопределенности будет двоичной единицей информации – бит. Во втором случае задаются исходные (априорные) вероятности всех возможных исходов опыта P_i ($i=1, 2, \dots, N$) так, что их сумма равна единице, при этом вероятностная или статистическая мера неопределенности описывается выражением

$$H_1 = - \sum_{i=1}^N P_i \log P_i = \sum_{i=1}^N H_i. \quad (10)$$

Если показания косвенного измерителя скорости звука – C_k , а прямого – C_n , то результат разности этих показаний будет случайная величина x , равная соответственно $x = C_k - C_n$. В случае дискретных по уровню измерений скорости, величина разности также будет принимать дискретные по уровню значения. Обозначим апостериорную вероятность $P\left(\frac{i}{j}\right)$ того, что в результате измерения получено j -ое значение при условии, что в действительности имело место i -ое значение. Пусть результат дает значение k ($j = k$). Тогда остаточная неопределенность о значении измеряемой величины оценивается величиной

$$H\left(\frac{i}{j} = k\right) = - \sum_{i=1}^N P_i\left(\frac{i}{k}\right) \cdot \log P\left(\frac{i}{k}\right). \quad (11)$$

При этом совместная вероятность наступления двух событий, состоящих в том, что результат измерения дает значение j , а в действительности имело место значение i , равно $P(i, j) = P_i \cdot P\left(\frac{i}{j}\right)$. Учитывая это, неопределенность измерения будет определяться величиной

$$H(j, i) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N P(i, j) \cdot \log P\left(\frac{i}{j}\right) = - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N P(i, j) \cdot \log \frac{P(i, j)}{P_j}. \quad (12)$$

Необходимо заметить, что скорость перемещения объемных загрязнений в морской водной среде не превышает десятых долей м/с, а их протяженность составляет от сотен метров до единиц км [22]. Получаем, что время прохождения антропогенного загрязнения через единичный (контролируемый) объем водной среды будет составлять часы. В то же время измерение и сравнение показаний прямого и косвенного измерителей скорости звука происходит с частотой в сотни Гц [3, 23], то есть выполняются сотни измерений в секунду. Исходя из этого, измеряемая величина разности x может считаться непрерывной, а пределы ее измерений могут колебаться от долей м/с до десятков м/с.

Остаточную неопределенность измерений будем оценивать погрешностью Δ_p , которая определяется значениями погрешности каждой из измеряемых величин. Обычно указанные погрешности могут принимать значения от 10^{-3} до 10^{-1} м/с. Допускаем, что погрешность, определяемая остаточную неопределенность, и погрешности измерений одинаковы и равны Δ_p . Если x и x_N – текущие значения измеряемой величины и результата измерения, то $P(x_N)$ – априорная плотность вероятности результата измерения x_N , а $P(x, x_N)$ – совместная плотность вероятности X и X_N . Полагается также, что $P(x_N)$ и $P(x, x_N)$ являются нормальными.

Следовательно, начальными условиями для разработки рассматриваемой математической модели обнаружения антропогенных загрязнений воды являются непрерывность измеряемых величин, погрешность разности которых определяется погрешностями измерений прямым и косвенным измерителями скорости звука. Априорная вероятность измеряемого результата и совместная вероятность истинного значения с измеряемым параметром подчиняются нормальному закону распределения. При этом граничные условия определяются допустимыми изменениями значений измеряемого параметра от 0,1 до 20 м/с, и погрешностью измерений от 10^{-3} до 10^{-1} м/с.

6. Обоснование математической модели обнаружения объемных антропогенных загрязнений, попадающих в воду

Пусть выполняются допущения, рассмотренные выше. Тогда справедливо представление для соответствующих вероятностей в виде:

$$\begin{aligned} P(i, j) &= p(x_i, x_{Nj}) \cdot \Delta_p, \\ P_j &= p(x_{Ni}) \cdot \Delta_p. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12) и переходя к интегральному представлению, получим

$$\begin{aligned} H\left(\frac{\chi}{x_N}\right) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, x_N) \cdot \log \frac{p(x, x_N) \cdot \Delta_p}{p(x_N)} \cdot dx dx_N = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, x_N) \cdot \log \frac{p(x, x_N)}{p(x_N)} \cdot dx dx_N - \log \Delta_p \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, x_N) \cdot dx dx_N. \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) первое слагаемое не зависит от погрешности разности измерений и представляет собой дифференциальную энтропию результирующих измерений. Учитывая, что во втором слагаемом (14)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, x_N) \cdot dx dx_N = 1, \quad (15)$$

полная результирующая энтропия измерений будет определяться разностью

$$H\left(\frac{X}{x_N}\right) = h\left(\frac{X}{x_N}\right) - \log \Delta_p. \quad (16)$$

В соответствии с начальными условиями, измеряемая величина X и результирующая погрешность измерения подчиняются нормальному закону, который определяется соответствующим математическим ожиданием $m_x = 0$, $m_\Delta = 0$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma(x)$ и $\sigma(\Delta)$. Учитывая это будем иметь, что

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma(X)} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2(x)}} \text{ и } p(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma(\Delta)} \cdot e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2(\Delta)}}. \quad (17)$$

Общее выражение для дифференциальной результирующей энтропии измерений имеет вид

$$h\left(\frac{X}{x_N}\right) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p\left(\frac{X}{x_N}\right) \cdot \log \frac{p(x, x_N)}{p(x_N)} \cdot dx dx_N. \quad (18)$$

При этом измерения определяются суммой истинного значения измеряемой величины и погрешности, то есть

$$X_x = X + \Delta. \quad (19)$$

Поэтому закон распределения для X_N будет определяться композицией законов распределения X и Δ , который в силу нормальности законов для составляющих будет также нормальным и определяться в виде

$$p(x_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot (\sigma^2(X) + \sigma^2(\Delta))}} \cdot e^{-\frac{x_N^2}{2[\sigma^2(x) + \sigma^2(\Delta)]}}. \quad (20)$$

Для закона (20) математическое ожидание $m_{x_N} = 0$, а дисперсия $\sigma(x_N) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(\Delta)}$. С учетом этого (18) можно рассматривать как первый момент, т.е. как математическое ожидание величины

$$\log \frac{p(x, x_N)}{p(x_N)} \text{ или } h\left(\frac{X}{x_N}\right) = M\left[-\log \frac{p(x, x_N)}{p(x_N)}\right]. \quad (21)$$

Для вычисления дифференциальной энтропии нужно найти совместный закон распределения X и X_N , для чего воспользуемся соотношением, что плотность вероятности двух событий $p(x, x_N)$ равна произведению плотности вероятности одного из них $p(x)$ на условную плотность вероятности измерения X_N при условии измерения X , то есть

$$p(x, x_N) = p(x) \cdot P\left(\frac{x_N}{x}\right). \quad (22)$$

При этом закон распределения вероятностей будет совпадать с законом распределения погрешностей и может быть записан в виде

$$P\left(\frac{x_N}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma(\Delta)} \cdot e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2(\Delta)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma(\Delta)} \cdot e^{-\frac{(x_N-x)^2}{2\sigma^2(\Delta)}}. \quad (23)$$

Исходя из этих рассуждений, дифференциальную энтропию можно представить в виде

$$h\left(\frac{\tilde{O}}{x_N}\right) = m \left[-\log \frac{p(x) \cdot P\left(\frac{x_N}{x}\right)}{p(x_N)} \right]. \quad (24)$$

Подставляя в (24) выражения (17) и (23) получим, что

$$\begin{aligned} h\left(\frac{\chi}{x_N}\right) &= -m \left\{ \log \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma(x)} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2(x)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma(\Delta)} \cdot e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2(\Delta)}} \right]}{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot (\sigma^2(X) + \sigma^2(\Delta))} \cdot e^{-\frac{x_N^2}{2\sigma^2(x) + \sigma^2(\Delta)}} \right]} \right\} = \\ &= -m \left\{ \log \frac{\sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(\Delta)}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma(x) \cdot \sigma(\Delta)} + \log e \left[-\frac{x^2}{2\sigma^2(X)} - \frac{(x_N - x)^2}{2\sigma^2(\Delta)} + \frac{x_N^2}{2(\sigma^2(x) + \sigma^2(x))} \right] \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

В (25) первое слагаемое, стоящее под знаком математического ожидания, является величиной постоянной, не зависящей от X , Δ , X_N . Известно, что математическое ожидание постоянной величины равно самой величине, а математическое ожидание суммы постоянных величин равно сумме математических ожиданий этих величин. Учитывая это, получим, что

$$h\left(\frac{X}{X_N}\right) = - \left[\log \frac{\sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(\Delta)}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma(X) \cdot \sigma(\Delta)} + \log e \left(-\frac{m(X^2)}{2\sigma^2(X)} - \frac{m[(X_N - x)]}{2\sigma^2(\Delta)} + \frac{m[X_N^2]}{2(\sigma^2(X) + \sigma^2(\Delta))} \right) \right]. \quad (26)$$

Поскольку математические ожидания величин X , Δ , X_N равны нулю, то выражения в (26), стоящие под знаком математического ожидания, представляют собой дисперсии соответствующих величин, то есть

$$\begin{aligned} m(X^2) &= D(x) = \sigma^2(X), \\ m[(X_N - x)^2] &= D[X_N - X] = D[\Delta] = \sigma^2(\Delta), \\ m(X_N^2) &= D(X_N) = D(X + \Delta) = \sigma^2(X) + \sigma^2(\Delta). \end{aligned} \quad (27)$$

С учетом (27) выражение (26) примет вид

$$h\left(\frac{X}{X_N}\right) = - \left[\log \frac{\sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(\Delta)}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma(X) \cdot \sigma(\Delta)} - \frac{1}{2} \cdot \log e \right] = \log \frac{\sqrt{2\pi \cdot e \cdot \sigma(X) \cdot \sigma(\Delta)}}{\sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(\Delta)}}. \quad (28)$$

Поэтому с учетом (23) информация, получаемая при измерении дискретной по уровню величины, распределенной по нормальному закону, с учетом указанных допущений, определяемых начальными условиями, будет определяться, как

$$\begin{aligned} I &= h(X) - h\left(\frac{X}{X_N}\right) = \log(\sqrt{2\pi \cdot e \cdot \sigma(X)}) - \log \frac{\sqrt{2\pi \cdot e \cdot \sigma(X) \cdot \sigma(\Delta)}}{\sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(\Delta)}} = \\ &= \log \frac{\sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(\Delta)}}{\sigma(\Delta)} = \log \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma(X)}{\sigma(\Delta)}\right)^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Следовательно, количество получаемой информации о значении измеряемой величины за определенный промежуток времени зависит от отношения дисперсии самой измеряемой величины к дисперсии погрешности её измерения.

Обнаружение объемного антропогенного загрязнения водной среды сводится к одновременному измерению скорости звука прямым и косвенным методами, описываемых (2) и (6), и последующему определению разности этих измерений, то есть

$$\Delta C = C_{\Pi} - C_{\kappa} = \sqrt{\frac{M}{\rho_0}} - f(T, S, P). \quad (30)$$

Объединяя выражения (30) и (29), получим искомую математическую модель обнаружения объемных антропогенных загрязнений морской воды следующего вида

$$\begin{cases} \Delta C = C_{\Pi} - C_{\kappa} = \sqrt{\frac{M}{\rho_0}} - f(T, S, P); \\ I = \log \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma(X)}{\sigma(\Delta)}\right)^2}. \end{cases} \quad (31)$$

Таким образом, разработанная математическая модель (31) обнаружения объемных антропогенных загрязнений морской воды представляет собой систему из двух аналитических зависимостей. Первая зависимость характеризует разность одновременно выполняемых измерений скорости звука прямым и косвенным методами, величина которой пропорциональна концентрации антропогенного загрязнения в исследуемом единичном объеме водной среды. Вторая зависимость описывает количество получаемой информации о значении измеряемой величины за определенный промежуток времени от отношения дисперсии самой измеряемой величины к дисперсии её измерения.

7. Теоретическое исследование разработанной математической модели обнаружения объемных антропогенных загрязнений воды

Теоретические исследования выполним для двух указанных зависимостей разработанной математической модели (31) обнаружения объемных антропогенных загрязнений морской воды в рамках задачи математической физики и оптимизации обработки сигналов соответственно.

Первая аналитическая зависимость, как граничная задача математической физики [24], в общем виде определяется следующим образом. В n -мерном евклидовом пространстве R^n , координаты точек которого могут содержать временную переменную, многомерная многосвязная область G ограничена поверхностью Γ . В области G определено некоторое дифференциальное уравнение в частных производных:

$$L \cdot u(x) = f(x), \quad x \in G, \quad (32)$$

где $L = (L_1, \dots, L_n)$ – линейный векторный дифференциальный оператор; $u(x)$ и $f(x)$ – элементы некоторых векторных функциональных пространств $R_1(G)$ и $R_2(G)$ соответственно.

На поверхности Γ определен оператор l соотношением

$$lu(x)|_{\Gamma} = \varphi(y), \quad y \in \Gamma, \quad (33)$$

где $\varphi(y)$ – элемент векторного функционального пространства $R_3(\Gamma)$.

Поверхность Γ может содержать отдельные незамкнутые поверхности, иметь бесконечно удаленную точку, может не охватывать всю границу области и другое. Как правило, определить $u(x)$ из уравнений (32) и (33) при заданных правых частях $f(x)$ и $\varphi(x)$ в элементарных функциях не удастся. Поэтому для решения этой задачи используются приближенные методы, одним из которых является метод разложения по неортогональным функциям. Его идея состоит в том, что в конечном ряду по системе функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N, \varphi \in R_1\}$ происходит замена пространства $R_1(G)$ его конечномерным подпространством $R^N(G)$, являющимся линейной оболочкой системы функций $\{\varphi(x)\}_{k=1}^N$. Приближенное решение $u^N(x)$ ищется в виде ряда

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(N)} \varphi_k(x). \quad (34)$$

Координаты разложения $\alpha_k^{(N)}$ находятся путем минимизации функционала

$$\|L \cdot u^N(x) - f(x)\|_{R_2(G)} + K_N \|u^N(y) - \varphi(y)\|_{R_3(\Gamma)}. \quad (35)$$

Постоянная K_N показывает, с каким «весом» должны удовлетворять граничные условия. На практике она существенно влияет на приближенное решение. Поскольку водная среда является упругой, а скорость распространения в ней упругих колебаний (скорость распространения звука C) – одна из характеристик упругих сред, то она будет определяться выражением (2). В то же время модуль объемной упругости равен сумме

$$M = \lambda_\Lambda + 2\mu_\Lambda, \quad (36)$$

где λ_Λ – первый коэффициент Ламе; μ_Λ – второй коэффициент Ламе (μ_Λ численно совпадает с модулем сдвига).

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство R^3 , заполненное средой, где λ_Λ и μ_Λ – коэффициенты Ламе. В точке O – источнике примеси, сформирована аномальная зона G , ограниченная поверхностью Γ , которая может иметь самую различную конфигурацию (рис. 2), тогда решение задачи (34) будет удовлетворять следующим интегральным соотношениям

$$u(x) = \int_{\Gamma} [l^{(1)}u(y)] K_1(x, y) dS_y + \int_{\Gamma} [l^{(2)}u(y)] K_2(x, y) dS_y, \quad x \in G, \quad (37)$$

$$0 = \int_{\Gamma} [l^{(1)}u(y)] K_1(z, y) dS_y + \int_{\Gamma} [l^{(2)}u(y)] K_2(z, y) dS_y, \quad z \notin G, \quad (38)$$

где $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$ – дифференциальные операторы, определенные на границе Γ ; K_1 и K_2 – ядра (матрицы) интегральных представлений (37) и (38).

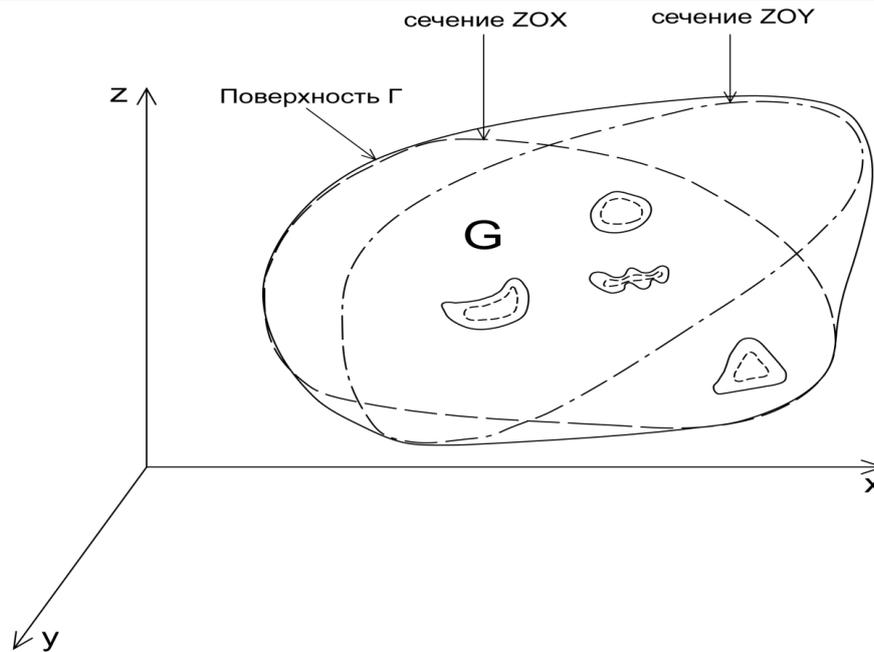


Рис. 2. Схема, пояснюющая постановку задачи

Пусть в точке x действует сила, сосредоточенная в направлении оси Ox_i ($i = 1, 2, 3$), тогда смещение любой точки $y \neq x$ описывается вектор-функцией $H_i(x, y)$ – фундаментальным решением системы однородных дифференциальных уравнений теории упругости. Для установившихся упругих колебаний с частотой ω оператор L примет вид

$$L = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \text{grad div} + \rho \omega^2, \tag{39}$$

а матрица фундаментальных решений

$$H(z_k, x) = \begin{pmatrix} H_{11}(z_k, x) & H_{12}(z_k, x) & H_{13}(z_k, x) \\ H_{21}(z_k, x) & H_{22}(z_k, x) & H_{23}(z_k, x) \\ H_{31}(z_k, x) & H_{32}(z_k, x) & H_{33}(z_k, x) \end{pmatrix}, \tag{40}$$

где

$$H_{ij}(z_k, x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{\mu} \cdot \frac{e^{iK_2 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)} - \frac{1}{\rho \omega^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \cdot \frac{e^{iK_1 r(z_k, x)} - e^{iK_2 r(z_k, x)}}{r(z_k, x)} \right), \tag{41}$$

где δ_{ij} – компоненты вектора напряжений; K_1 и K_2 – неотрицательные числа, определенные равенствами

$$\left. \begin{aligned} K_1^2 &= \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \\ K_2^2 &= \frac{\rho \omega^2}{\mu} \end{aligned} \right\}. \tag{42}$$

При выполнении указанных выше условий формулы (37) и (38) примут вид:

$$u(x) = \iint_{\Gamma} H(x, y) T u(y) dS_y - \iint_{\Gamma} u(y) T H(x, y) dS_y, \quad x \in G, \quad (43)$$

$$0 = \iint_{\Gamma} H(z, y) T u(y) dS_y - \iint_{\Gamma} u(y) T H(x, y) dS_y, \quad z \notin G, \quad (44)$$

где $H(x, y)$ – матрица Купрадзе, T – оператор напряжения.

При решении граничных задач в уравнениях установившихся колебаний решение можно искать в виде суммы безвихревого (потенциального) и соленоидального решений уравнения Гельмгольца

$$u(x) = v(x) + \bar{v}(x), \quad (45)$$

где векторы $v(x)$ и $\bar{v}(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + K_1^2) V(x) = 0, \quad \text{rot } v(x) = 0 \\ (\Delta + K_2^2) \bar{V}(x) = 0, \quad \text{div } \bar{v}(x) = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (46)$$

Введем допущения, характерные для реальной водной среды.

1. Изотропность, то есть независимость свойств среды от направления распространения упругих колебаний.

2. Объемная сила $F(x, t)$ меняется по времени гармонически, то есть

$$F(x, t) = A(x) \cos \omega t + B(x) \sin \omega t. \quad (47)$$

Выражение (47) оценивает действие высокочастотного акустического излучателя, применяемого в устройствах, реализующих прямые методы измерения скорости звука в водной среде.

3. На границе области G непосредственно на поверхности Γ значение скорости звука совпадает со значением скорости звука в пространстве R^3 и равно C_1 .

4. В автономной области G имеется область (достигающая даже элементарного бесконечно малого объема), где концентрация загрязнения максимальна (объем примеси приблизительно равен объему воды), а плотность загрязнения значительно отличается от плотности воды. Либо превосходит ее, как порошок металлического сурика, то есть $\rho_{a1} \ll \rho_i$. Либо меньше ее, как пузырьки воздуха. Кроме этого, загрязнение не растворимо в воде, но является мелкодисперсным, то есть размеры его частиц соизмеримы с молекулами воды. Тогда матрица фундаментальных решений примет вид

$$H_{ij}(z_k, x, t) = \frac{1}{4\pi\rho C_2^2} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{2\pi\mu} f\left(t - \frac{r(z_k, x)}{C_2}\right) + \right. \\ \left. + C_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \int_0^t \frac{1}{r(z_k, x)} \left[\eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{C_1}\right) - \eta\left(t' - \frac{r(z_k, x)}{C_2}\right) \right] f(t - t') dt' \right\}, \quad (48)$$

где

$$\eta(a) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leq 0, \\ a & \text{при } a > 0. \end{cases}$$

В выражении (48) присутствуют две константы: C_1 – значение скорости звука в водной среде при отсутствии объемных антропогенных примесей, C_2 – значение скорости звука при максимально допустимых параметрах мелкодисперсной примеси, при этом

$$C_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{\Lambda} + 2\mu_{\Lambda}}{\rho}} = \sqrt{\frac{M}{\rho}}. \quad (49)$$

Здесь C_1 соответствует классическому определению скорости звука в водной среде без посторонних примесей, тогда

$$C_2 = \sqrt{\frac{\mu_{\Lambda}}{\rho}}, \quad (50)$$

где C_2 – это минимально возможное (экстремальное) значение скорости звука при наибольших показателях мелкодисперсной примеси.

Изменение (величина уменьшения) скорости звука в зависимости от увеличения концентрации мелкодисперсной примеси будет определяться аналитической зависимостью

$$\Delta C = K_{\text{np}} \left[\sqrt{\frac{M}{\rho}} - \sqrt{\frac{\mu_{\Lambda}}{\rho}} \right], \quad (51)$$

где $K_{\text{np}} = \frac{\rho_{\text{в1}}}{\rho}$ – коэффициент, характеризующий изменение плотности воды в зависимости от количества и физических свойств внесенной в нее примеси; $\rho_{\text{в1}}$ – плотность чистой воды в единичном объеме жидкости; ρ – плотность воды с примесью при условии, что она распределена равномерно в единичном объеме жидкости, вычисляемая по формуле (4).

Следовательно, теоретические исследования показывают, что величина численного значения скорости звука в водной среде при добавлении в нее антропогенной мелкодисперсной примеси будет измениться. Эти изменения будут происходить в сторону уменьшения численного значения скорости звука, независимо от плотности частичек антропогенного загрязнения. Уменьшение численного значения скорости звука будут тем больше, чем выше концентрация антропогенной примеси. Графическая интерпретация этого исследования представлена на рис. 3.

Вторая зависимость исследуется, с позиций обработки сигналов, принимаемых радиоэлектронными устройствами. Все устройства, реализующие прямые методы измерения скорости звука в водной среде, работают по одной классической схеме.

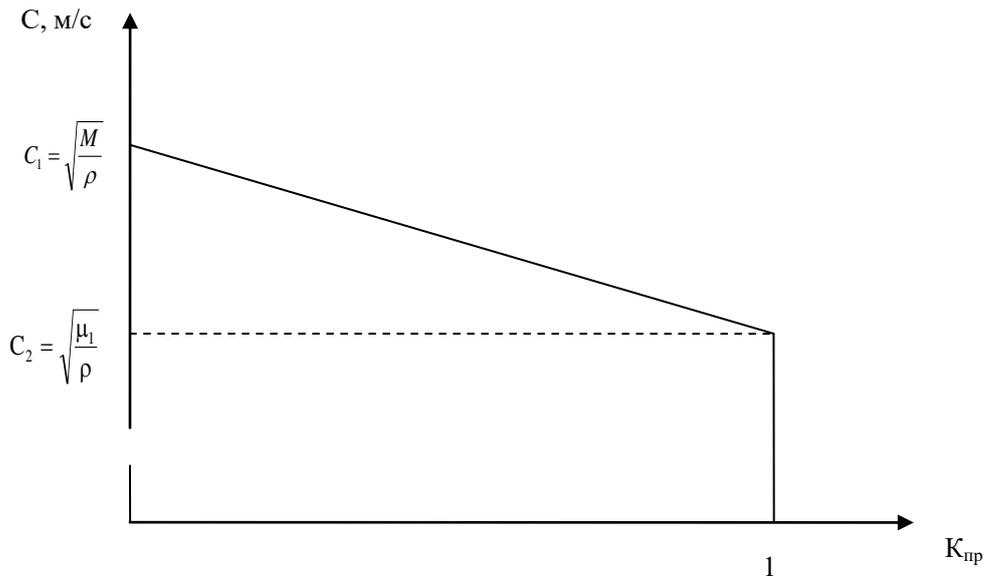


Рис. 3. Диаграмма уменьшения скорости звука в зависимости от увеличения количества антропогенной примеси

Производится излучение акустического сигнала в водную среду и фиксируется время прохождения этим сигналом фиксируемого (известного стандартного) расстояния, которое принято называть измерительной базой.

Пусть $S_i(t)$ – принимаемый приемной антенной сигнал, $\varphi_k(t)$ – опорный сигнал (излучаемый передающей антенной), $S_i(w)$ и $\varphi_k(w)$ – их спектры, а T – длительность излучаемого акустического сигнала. Для оптимальных алгоритмов линейной обработки сигналов одноканальных систем основной является операция вычисления скалярного произведения

$$U(t) = \int_0^T S_i(t) \cdot \varphi_k(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_i(w) \cdot \varphi_k(w) dw. \quad (52)$$

Здесь функция $U(t)$ является мерой схожести (или различия) сигналов с индексами i и k . При $i = k$ эта функция максимальна и определяет выходной эффект приемника для «своего» сигнала, а при $i \neq k$ выходной эффект $U(t)$ будет определять межсигнальную помеху, обусловленную влиянием соседних (раннее излученных) сигналов. В каналах с аддитивной помехой выходной эффект приемника определяется корреляционным интегралом

$$U_{ik} = \int_0^T x_i(t) \cdot \varphi_k(t) dt, \quad (53)$$

где $x_i(t) = S_i(t) + n_\Sigma(t)$ – принимаемое колебание на входе приемника измерителя; $\varphi_k(t)$ – опорное колебание, определяющее алгоритм обработки сигнала.

Если передаваемые сигналы $\{S_i(t)\}$ равновероятны и имеют одинаковую энергию, и в канале передачи информации (вдоль измерительной базы) действует гауссовский шум $n(t)$, то прием будет оптимальным по максимуму правдоподобия

бия, когда $\varphi_k = S_k(t)$. В этом случае приемник вычисляет функцию взаимной корреляции принятого колебания $x_i(t)$ со всеми m ожидаемыми сигналами $\{S_k(t), k = 1, 2, \dots, m\}$:

$$U_{ik} = \int_0^T x_i(t) \cdot S_k(t) dt = \int_0^T [S_i(t) + n(t)] \cdot S_k(t) dt. \quad (54)$$

Выражение (54) принимает наибольшее значение для передаваемого сигнала. Такой приемник должен содержать коррелятор с опорными сигналами $\varphi_k(t) = S_k(t)$ или согласованные фильтры, импульсные реакции которых $\varphi_k(t) = aS_k(T-t)$, где a – постоянный множитель.

При наличии вдоль измерительной акустической базы различного рода помех и искажений, отличных от гауссового шума, помехоустойчивость системы будет отличаться от потенциальной помехоустойчивости, и определяться соотношением сигнал-шум и коэффициентами корреляции сигналов

$$U'_{ik} = \int_0^T x'_i(t) \cdot \varphi_k(t) dt. \quad (55)$$

В свою очередь

$$x'_i(t) = \int_0^T \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} S_i(t_3) \cdot q_{\text{пер}}(t_2 - t_3) \cdot q(t_1 - t_2) dt_2 dt_3 + n_{\Sigma}(t_1) \cdot q_{\text{пр}}(t - t_1) dt, \quad (56)$$

где $q_{\text{пер}}$, $q_{\text{пр}}$ – импульсные характеристики фильтров на передатчике и приемнике; $q(t_1, t_2)$ – импульсная характеристика параметрического фильтра, характеризующего измерительную акустическую базу.

Совокупность корреляционных параметров $\{U'_{ik}, i, k = 1, 2, \dots, m\}$, определяемых выражением (55), образуют матрицу $[U]'$. При заданной (эталонной) матрице $[U]$ матрица, равная

$$[U]' - [U], \quad (57)$$

характеризует степень снижения помехоустойчивости корреляционного приемника за счет искажений различного рода помех в акустическом канале вдоль базы, расположенной от излучающей антенны до приемной.

Используя выражение (57) нельзя оценить качество системы передачи информации вследствие того, что функции $U'_{ik}(t)$ и $U_{ik}(t)$ являются случайными величинами. Качество работы приемника оценим по среднему квадрату нормы матрицы погрешностей

$$D = M \left\{ \left\| [U]' - [U] \right\|^2 \right\} = M \left(\sum_{i,k=1}^m (U'_{ik} - U_{ik})^2 \right), \quad (58)$$

где $M\{\cdot\}$ – усреднение по всем реализациям U_{ik}, U'_{ik} , которое в общем случае определяется выражением (55).

Выбор среднеквадратического решения позволяет получить решение задачи оптимизации в аналитической форме путем сведения выражения (54) к квадратичному функционалу $(B\varphi_k, \varphi_k)$ где B – положительно определенный оператор, действующий в $L^2\left(\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$. Пространство L^2 считается вещественно скалярным произведением

$$(f, q) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot q(t) dt; \quad f(t), q(t) \in L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right). \quad (59)$$

Следовательно, теоретические исследования второй зависимости показывают, что задача оптимизации системы по критерию максимального правдоподобия сводится к минимизации квадратичного функционала путем выбора оптимальных сигналов или алгоритмов обработки. Для одноканальной системы ($i, k = 1$) минимум квадратичной функции $(B\varphi, \varphi)$ при условии несмещенности $(\varphi, S) = 1$ позволяет получить на выходе системы максимум отношения сигнал – шум в некоторый момент времени t_0 . Техническая реализация этого решения может состоять в выборе:

- вида, формы и сложности опорного сигнала;
- длительности излучаемых сигналов (импульсов) и периода их следования;
- времени осреднения, времени в течении которого производится систематизация текущих единичных измерений:
 - числа сопоставлений прямых и косвенных измерений;
 - стратегия принятия решения по числу сопоставлений (2 из 2, 3 из 3, 4 из 4, 3 из 4 и другие).

Таким образом, теоретические исследования математической модели обнаружения объемных антропогенных загрязнений, попадающих в воду, показывают, что наличие антропогенной примеси в водной среде вызывает уменьшение численного значения скорости звука измеренной прямыми методами измерений. Оптимизация измерительной системы по критерию максимального правдоподобия сводится к минимизации квадратичного функционала путем выбора оптимальных сигналов и алгоритмов обработки.

8. Выводы

1. Анализ физической модели обнаружения объемного антропогенного загрязнения в водной среде показывает, что при внесении антропогенной объемной примеси в водную среду будут изменяться ее упругие (плотностные) характеристики, которые будут влиять на измерения скорости звука, выполняемые прямыми методами. Показано, что измерения скорости звука, выполняемые косвенными методами, не будут реагировать на наличие антропогенного загрязнения. При этом разница в измерениях, выполненных прямыми и косвенными методами, будет тем больше, чем выше концентрация антропогенных загрязнений.

2. Начальными условиями для разработки математической модели являются непрерывность измеряемых величин, погрешность сравнения которых определяется точностью измерений скорости звука прямым и косвенным методами. Априорная вероятность получения измеряемого результата и совместная вероятность появления истинного значения величины с измеряемым параметром подчиняются нормальному закону распределения. При этом граничные условия определяются диапазоном изменения значений измеряемой величины от 0,1 до 20 м/с, а также погрешностью их измерений от 10^{-3} до 10^{-1} м/с.

3. Разработанная математическая модель обнаружения объемных антропогенных загрязнений, попадающих в воду, представляет собой совокупность двух аналитических зависимостей. Первая показывает разницу результатов одновременно выполненных измерений скорости звука прямым и косвенным методами, величина которой пропорциональна концентрации антропогенного загрязнения в исследуемом единичном объеме водной среды. Вторая зависимость характеризует количество информации о значении измеряемой величины за определенный промежуток времени, которое зависит от отношения дисперсии самой измеряемой величины к дисперсии её измерения.

4. Теоретические исследования математической модели обнаружения объемных антропогенных загрязнений морской воды подтверждает, что наличие антропогенного загрязнения в водной среде приводит к уменьшению численного значения скорости звука, измеренной прямыми методами. Показано, что оптимизация системы обнаружения загрязнений по критерию максимального правдоподобия в этом случае сводится к минимизации квадратичного функционала путем выбора оптимальных сигналов и алгоритмов их обработки. Этот результат не противоречит известным сведениям в теории оптимального приема сигналов.

Литература

1. Водний кодекс України. URL: <http://www.zakon.rada.gov.ua>
2. Азаренко Е. В., Гончаренко Ю. Ю., Дивизинюк М. М. Проблемы управления экологической безопасностью прибрежных вод и пути её решения // Системи обробки інформації. 2012. Вип. 2(100). С. 271 – 275.
3. Булгаков Н. П., Ефимов Е. В., Нелепо Б. А. и др. // Синоптические вихри в океане. Наукова думка, 1980. 288 с.
4. Стадник М. Е. Оцінка стану малих рік України // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Економіка. 2015. Вип. 4. С. 289–294.
5. Дубак Р. О. Стандартные методы определения загрязнений // Научный вестник. 2016. № 7. С. 87–95.
6. Гринь С. О., Філенко О. М., Кузнецов П. В. Аналіз критеріїв нормування екологічної безпеки водних об'єктів // Экологический мониторинг. Метрология. Стандартизация и Сертификация. 2013. №. 3. С. 107–111.
7. Крайнюков О. М. Особливості системи нормування антропогенного забруднення поверхневих вод в Україні та країнах ЄС // Молодий вчений. 2016. № 3(30) С. 300–303.
8. Robins J. Assessment of anthropogenic pollution of small rivers // Practical Journal. 2017. № 6. P. 138–142.
9. Warnes M. Assessment of anthropogenic pollution // Practical Journal. 2015. V. 9. P. 128–135.
10. Impacts of increasing anthropogenic soluble iron and nitrogen deposition on ocean biogeochemistry / A. Krishnamurti, J. Keith Moore, N. Mahowald, C. Lo, S. S. Doney, K. Lindsay, C. S. Zender // Global biogeochemical cycles. 2009. №23. P. 1–15.

11. Quantitative analysis of anthropogenic impacts on coastal waters / M. Tsai, Y. Luke, K. Chen, D. Huang, S. Yang // Environmental indicators. 2016. №67. P. 673–683.
12. Mans L. New methods for assessing water systems // Scientific journal. 2015. №4. P. 78–95.
13. Окрут С. В. Влияние различных видов загрязнения на степень деградационных процессов малых рек // Вестник АПК Ставрополя. 2012. Вып. 4 (8) С. 104–107.
14. Курочина В. А., Богомолова Т. Г., Киров Б. Л. Антропогенная нагрузка на реки урбанизированных территорий // Вестник МГСУ. 2016. Вып. 8. С. 100–109.
15. Жургин В. А. Инновационные методы оценки качества водных объектов // Системы обработки информации. 2009. Вып. 6. С. 300–310.
16. Vance S., Brown J. Michael Sound speeds and thermodynamic properties of water up to 700 MPa and from -10 to 100°C // Acoustic Society of America. 2010. V. 127(1). P. 174–180.
17. Бабий В. И., Бабий М. В., Родионов А. А. Перспективный оптико-акустический метод измерения параметров термодинамического состояний морской среды. Оценка погрешности // Морской гидрофизический журнал. 2016. № 2. С. 70–81.
18. Бабий В. И. Взаимосвязь скорости звука и коэффициента поглощения звука в воде // Гидроакустический журнал. 2010. №7. С. 82–89.
19. Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики. Материалы все-российской конференции. 2018. Вып. 7. С. 652.
20. Евтютов А. П., Евтютов А. П., Митько В. Б. Примеры инженерных расчетов в гидроакустике // Судостроение. 1988. 288 с.
21. Прэтт У. Цифровая обработка изображений // Мир. Т. 2. 1982. 542 с.
22. Гончаренко Ю. Ю. Модели распространения нефтяных загрязнений на водной поверхности. Монография. Гос. Океанариум, 2011. 104 с.
23. Дивизинюк М. М. Акустические поля Черного моря. Монография. Гос. Океанариум. 1998. 352 с.
24. Иосида К. Функциональный анализ // Мир. 1967. 620 с.

*В. А. Андронов¹, д.т.н., профессор, проректор
М. М. Дивизинюк², д.ф.-м.н., профессор, нач. відділу
Є. В. Иванов¹, викладач*

*Є. О. Рыбка¹, д.т.н., ст. дослідник, заст. нач. центру – нач. відділу
А. П. Суліма², провідн. інженер*

¹Національний університет цивільного захисту України, Харків, Україна

²Державна установа «Інститут геохімії навколишнього середовища
Національної академії наук України»

РОЗРОБКА МОДЕЛІ ВИЯВЛЕННЯ ОБ'ЄМНИХ АНТРОПОГЕННИХ ЗАБРУДНЕНЬ ВОДИ

Розроблено математичну модель виявлення об'ємних антропогенних забруднень води. Аналіз фізичної моделі виявлення забруднення у водному середовищі, показав, що при внесенні об'ємно забруднення у водне середовище змінюються її пружні (щільнісні) характеристики, що впливають на величину швидкості поширення звуку, яка вимірюється прямими методами. Відзначається, що вимірювання швидкості звуку, які виконуються непрямыми методами, інваріантні наявності антропогенного забруднення. При цьому різниця у вимірах, виконаних прямими і непрямыми методами, буде тим більше, чим вище концентрація антропогенних забруднень. Початковими умовами для розробки математичної моделі є безперервність вимірюваних величин, похибка порівняння яких визначається точністю вимірювань швидкості звуку прямим і непрямим методами. Априорна ймовірність отримання вимірюваного результату та спільна ймовірність появи істинного значення величини з вимі-

рюваним параметром підлягають нормальному закону розподілу. При цьому граничні умови визначаються діапазоном зміни значень вимірюваної величини від 0,1 до 20 м/с, а також похибкою таких вимірювань від 10^{-3} до 10^{-1} м/с. Математична модель виявлення забруднень води базується на сукупності двох аналітичних залежностей. Перша залежність характеризує величину різниці одночасно виконаних вимірювань швидкості звуку прямим і непрямым методами. Друга – характеризує кількість одержуваної інформації в вимірюваній величині за певний проміжок часу, який залежить від відношення дисперсії вимірюваної величини до дисперсії її вимірювання. Теоретичні дослідження запропонованої моделі в цілому підтверджують, що наявність антропогенного забруднення у водному середовищі призводить до зменшення чисельного значення швидкості звуку, яка вимірюється прямими методами. Показано, що оптимізація системи виявлення забруднень за критерієм максимальної правдоподібності в цьому випадку зводиться до мінімізації відповідного квадратичного функціоналу шляхом вибору оптимальних сигналів і алгоритмів їх обробки.

Ключові слова: надзвичайна ситуація, антропогенне об'ємне забруднення, водне середовище, модель, виявлення

V. Andronov, DSc, Professor, Vice Rector

M. Diviznyuk, DSc, Professor, Head of Department

E. Ivanov, Lecturer

E. Rybka, DSc, Senior Researcher, Deputy Head of the Center – Head of Department

A. Sulima, Senior Engineer

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL FOR DETECTING VOLUME ANTHROPOGENIC WATER POLLUTIONS

A mathematical model for the detection of volumetric anthropogenic water pollution has been developed. An analysis of the physical model for detecting pollution in the aquatic environment showed that when bulk pollution is introduced into the aquatic environment, its elastic (density) characteristics change, affecting the magnitude of the speed of sound propagation, measured by direct methods. It is noted that sound velocity measurements performed by indirect methods are invariant to the presence of anthropogenic pollution. Moreover, the difference in measurements made by direct and indirect methods will be the greater, the higher the concentration of anthropogenic pollution. The initial conditions for the development of a mathematical model are the continuity of the measured values, the comparison error of which is determined by the accuracy of measurements of sound speed by direct and indirect methods. The a priori probability of obtaining the measured result and the joint probability of the appearance of the true value of the quantity with the measured parameter obey the normal distribution law. In this case, the boundary conditions are determined by the range of variation of the measured value from 0.1 to 20 m/s, as well as the error of such measurements from 10^{-3} to 10^{-1} m/s. The mathematical model for detecting water pollution is based on a combination of two analytical relationships. The first dependence characterizes the magnitude of the difference of simultaneously measured sound velocity measurements by direct and indirect methods. The second - characterizes the amount of information received in the measured quantity for a certain period of time, which depends on the ratio of the variance of the measured quantity to the variance of its measurement. Theoretical studies of the proposed model as a whole confirm that the presence of anthropogenic pollution in the aquatic environment leads to a decrease in the numerical value of the speed of sound measured by direct methods. It is shown that the optimization of the pollution detection system by the criterion of maximum likelihood in this case is reduced to minimizing the corresponding quadratic functional by choosing the optimal signals and their processing algorithms.

Keywords: emergency, man-made volumetric pollution, aquatic environment, model, detection

References

1. Vodnyy kodeks Ukrainy. Retrieved from <http://www.zakon.rada.gov.ua>
2. Azarenko, E. V., Honcharenko, YU. YU., Dyvyzynyuk, M. M. (2012). Problemy upravlinnya ekolohichnoyu bezpekoyu prybrezhnykh vodnykh i puti-rishen. Systema informatsiyi. 2 (100), 271–275.
3. Bulhakov, N. P., Efimov, E. V., Nelepo, B. A. (1980). Synoptychni vykhry v okeani. Naukova dumka, 288.
4. Stadnyk, M. E. (2015). Otsinka stanu malykh rik Ukrainy. Naukovyy visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Seriya Ekonomika, 4, 289–294.

5. Dubak, R. O. (2016). Standartnyye metody opredeleniya zagryazneniy. Nauchnyy vestnik, 7, 87–95.
6. Hryn, S. O., Filenko, O. M., Kuznyetsov, P. V. (2013). Analiz kryteriyiv normuvannya ekolohichnoyi bezpeky vodnykh obyektiv Ekolohycheskyy monytorynh. Metrolohyya. Standartyzatsyya y Sertyfykatsyya, 3, 107–111.
7. Kraynyukov, O. M. (2016). Osoblyvosti systemy normuvannya antropohennoho zabrudnennya poverkhnevyykh vod v Ukrayini ta krayinakh YES. Molodyy vchenyy, 3(30), 300–303.
8. Robins, J. (2017). Assessment of anthropogenic pollution of small rivers. Practical Journal, 6, 138–142.
9. Warnes, M. (2015). Assessment of anthropogenic pollution. Practical Journal, 9, 128–135.
10. Impacts of increasing anthropogenic soluble iron and nitrogen deposition on ocean biogeochemistry. Aparna Krishnamurti., J. Keith Moore., Natalie Mahowald., Chao Lo., Scott S. Doney., Keith Lindsay, Charles S. Zender. (2009). Global biogeochemical cycles, 23, 1–15.
11. Quantitative analysis of anthropogenic impacts on coastal waters Mingang Tsai., Yang Luke., Kai Chen., Dongren Huang., Shenyun Yang. (2016). Environmental indicators. 67, 673–683.
12. Mans L. (2015). New methods for assessing water systems. Scientific journal, 4, 78–95.
13. Pelipenko, U. G., Lysenko, I. O. (2012). Vliyaniye razlichnykh vidov zagryazneniya na stepen degradatsionnykh protsessov malykh rek Nauchno-prakticheskiy zhurnal, 4 (8), 104–107.
14. Kurochina, V. A. Bogomolova, T. G., Kirov B. L. (2016). Antropogennaya nagruzka na reki urbanizirovannykh territoriy. Vestnik MGSU, 8, 100–109.
15. Zhurgin, V. A. (2009). Innovatsionnyye metody otsenki kachestva vodnykh obyektov. Sistemy obrabotki infomatsii, 6, 300–310.
16. Vance S., Brown J. Michael (2010). Sound speeds and thermodynamic properties of water up to 700 MPa and from -10 to 100 ° C. Acoustic Society of America, 127(1), 174–180.
17. Babiy, V. I., Babiy, M. V., Rodionov, A. A. (2016). Perspektivnyy optikoakusticheskiy metod izmereniya parametrov termodinamicheskogo sostoyaniy morskoy sredy, Otsenka pogreshnosti Morskoy gidrofizicheskoy, 2, 70–81.
18. Babiy, V. I. (2010). Vzaimosvyaz skorosti zvuka i koeffitsiyenta pogloshcheniya zvuka v vode Gidroakusticheskiy zhurnal, 7, 82–89.
19. Prikladnyye tekhnologii gidroakustiki i gidrofiziki. Vserossiyskaya konferentsiya (2018), 7, 652.
20. Evtyutov, A. P., Evtyutov, A. P., Mytko, V. B. (1988). Prymery inzhenernykh raschetov v gidroakustyke. Sudostroeniya, 288.
21. Prett, U. (1982). Tsyfrova obrobka zobrazhenykh. Myr, 2, 542.
22. Honcharenko, YU.YU. (2011). Modeli rozpovsyudzhuyut neftyanykh zahryaznenyy na vodnoyi dostovirnosti. Monohrafiya. Hos. Okeanarium, 104.
23. Dyvyzynyuk, M. M. (1998). Akustychni polya Chornoho morya. Monohrafiya. Hos. Okeanarium, 352.
24. Iosyda, K. (1967). Funktsionalnyy analiz. Myr, 620.

Надійшла до редколегії: 28.09.2019

Прийнята до друку: 16.10.2019