

*Беляев В.Ю., адъюнкт, НУГЗУ,  
Тарасенко А.А., д-р техн. наук, ст. науч. сотр., НУГЗУ*

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЛНОВОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МАРШРУТОВ ЭВАКУАЦИИ НАСЕЛЕННОГО ПУНКТА В УСЛОВИЯХ БЕЗДОРОЖЬЯ**

Предложена математическая модель поиска оптимального маршрута эвакуации и ее реализация в виде итерационного алгоритма бегущей волны применительно к границе области транспортной достижимости, позволяющая учесть особенности реальной обстановки в зоне чрезвычайной ситуации. Предложена аппроксимация уравнения ранее полученной индикатрисы скорости эвакуации, оценена погрешность данной аппроксимации.

**Ключевые слова:** эвакуация населения, скорость движения, волновой алгоритм, оптимальный маршрут

**Постановка проблемы.** Эвакуация населения направлена на снижение людских потерь в случае развития масштабных природных и техногенных чрезвычайных ситуаций (ЧС). Экстренная эвакуация населения населенного пункта (НП) в случае угрозы природной или техногенной ЧС, либо персонала крупного промышленного объекта (ПО) в случае масштабной аварии в основном осуществляется с помощью автотранспорта. При этом существующая транспортная сеть может оказаться разрушенной либо временно недоступной, в том числе из-за принадлежности участков дорог областям, подвергшимся влиянию поражающих факторов ЧС. Организация спасения населения в этом случае требует оперативного нахождения оптимальных (наискорейших) маршрутов эвакуации в условиях бездорожья, использование которых позволяет повысить эффективность эвакуации населения НП и персонала ПО.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Нахождение оптимальных маршрутов следования, в том числе при эвакуации населения, предполагает использование алгоритма бегущей волны [1], реализованного в решеточной постановке [2,3], что обусловлено широким использованием растровых цифровых моделей местности. Между тем, адекватное описание ландшафтных условий требует задание цифровых карт высокого разреше-

ния, что приводит к квадратичному росту объема хранимой и обрабатываемой информации и, соответственно, снижает оперативность данного алгоритма. При этом в континуальной (нерешеточной) постановке данная задача прежде не рассматривалась.

**Постановка задачи и ее решение.** Целью работы является создание математической модели оптимального маршрута эвакуации и реализация ее в виде итерационного алгоритма бегущей волны в континуальной постановке, что позволяет адекватно учесть особенности местности и тактико-технические характеристики (ТТХ), используемых для эвакуации транспортных средств (АС).

Привлечение волнового алгоритма при построении динамического фронта транспортной достижимости в континуальной постановке основывается на использовании принципа Гюйгенса [4] – каждая из точек фронта волны является источником вторичных волн (ВВ), огибающая к которым представляет собой новый фронт. В изотропной среде ВВ представляет собой окружность; в неоднородной среде параметры ВВ определяются свойствами среды в каждой ее точке. Вторичная волна области транспортной достижимости задается индикатрисой  $v_n(x, y, \phi, Z(x, y), w)$  скорости движения АС, полярное уравнение которой в зависимости от локальных значений параметров рельефа  $Z(x, y)$  и вектора  $w$  ТТХ АС получено в [5].

Упомянутое выражение является непригодными для дальнейшего использования, поскольку в силу своей сложности не позволяет осуществить аналитические построения на основе применения принципа Гюйгенса. Поэтому целесообразно осуществить аппроксимацию данного выражения уравнениями дуг окружностей (рис. 1), в связи с чем возникает необходимость в нахождении параметров указанных окружностей и оценки точности предлагаемой аппроксимации.

Введем в горизонтальной плоскости локальную систему координат  $X''O''Y''$ , связанную с проекцией полюса индикатрисы и ориентированную ось абсцисс вдоль градиента рельефа. Воспользуемся известным положением о том, что центр окружности находится на пересечении срединных нормалей смежных хорд. Введем обозначения  $v_n(\pm\pi/2) = a$  - проекция на  $X''O''Y''$  вектора скорости движения АС перпендикулярно склону;  $v_n(0) \cdot \cos \alpha_{\nabla} = b_2$  и  $v_n(\pi) \cdot \cos \alpha_{\nabla} = b_1$  - аналогичные проекции для движения вверх и

вниз по склону, відповідно, ( $\alpha_v$  – крутизна склону в напрямленні градієнта).

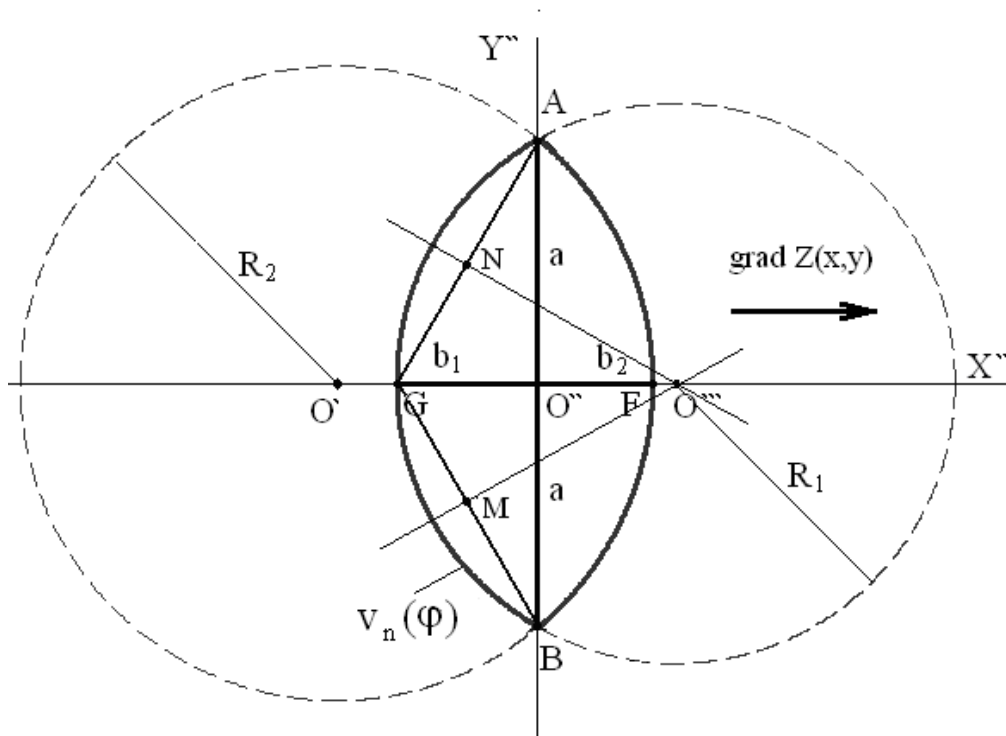


Рис. 1 – Аппроксимация индикатрисы  $v_n(\phi)$  дугами окружностей

В локальной декартовой системе координат  $X''O''Y''$ , связанной с полюсом  $O''$  индикатрисы, зададим точки  $A(0;a)$ ,  $B(0;-a)$ ,  $G(-b_1;0)$ ,  $F(b_2;0)$ ,  $N(-b_1/2;a/2)$ ,  $M(-b_1/2;-a/2)$ .

Явные уравнения срединных нормалей  $NO'''$  и  $MO'''$  имеют вид

$$\begin{aligned} y_{NO'''} &= \frac{a^2 - 2b_1x - b_1^2}{2a}; \\ y_{MO'''} &= \frac{-a^2 + 2b_1x + b_1^2}{2a}. \end{aligned} \quad (1)$$

Их пересечение (центр  $O'''$  окружности) имеет координаты  $O''' \left( \frac{a^2 - b_1^2}{2b_1}; 0 \right)$ . Аналогично найденный центр окружности  $O'$  име-

ет координаты  $O' \left( -\frac{a^2 - b_2^2}{2b_2}; 0 \right)$ . Радиусы  $R_1$  и  $R_2$  окружностей равны

$$R_{1,2} = \frac{b_{1,2}^2 + a^2}{2b_{1,2}}. \quad (2)$$

При повороте оси  $O''X''$  под углом  $\psi$  (азимут градиента) к оси  $OX$  полярные уравнения окружностей в глобальной системе координат  $XOY$  примут вид

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(b_2^2 - a^2) \cos(\phi - \psi) + \sqrt{(b_2^2 + a^2)^2 - (b_2^2 - a^2) \sin^2(\phi - \psi)}}{2b_1}; \\ v_2 &= \frac{(b_1^2 - a^2) \cos(\phi - \psi) - \sqrt{(b_1^2 + a^2)^2 - (b_1^2 - a^2) \sin^2(\phi - \psi)}}{-2b_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что  $v_1$  и  $v_2$  зависят от крутизны  $\alpha_\nabla$ .

Полярное уравнение проекции индикатрисы на плоскость  $XOY$  будет задаваться дугами данных окружностей и будет иметь вид

$$v_n = \begin{cases} \begin{cases} v_1, & \phi \leq \pi/2 + \psi; \\ v_2, & \phi \leq 3\pi/2 + \psi; \\ v_1, & \phi \leq 2\pi; \end{cases} & 0 \leq \psi < \pi/2; \\ \begin{cases} v_2, & \phi \leq -\pi/2 + \psi; \\ v_1, & \phi \leq \pi/2 + \psi; \\ v_2, & \phi \leq 2\pi; \end{cases} & \pi/2 \leq \psi < 3\pi/2; \\ \begin{cases} v_1, & \phi \leq -3\pi/2 + \psi; \\ v_2, & \phi \leq -\pi/2 + \psi; \\ v_1, & \phi \leq 2\pi; \end{cases} & 3\pi/2 \leq \psi < 2\pi. \end{cases} \quad (4)$$

При этом параметрическое уравнение поля  $V_n(x, y, \phi)$  проекции индикатрисы с полюсом в точке  $(x; y)$  на плоскость  $XOY$  будет иметь вид

$$V_n(x, y, \phi) = \begin{cases} V_{nx} = x + v_n \cos \phi; \\ V_{ny} = y + v_n \sin \phi, \end{cases} \quad \phi \in [0; 2\pi]. \quad (5)$$

Относительная погрешность  $W_{V_n}$  аппроксимации проекции индикатрисы (см. [5]) на плоскость  $XOY$ , задаваемая выражением (4), не превышает 4% в диапазоне крутизны  $0^\circ \leq \alpha_\nabla \leq 50^\circ$  и демонстрирует рост с ее увеличением.

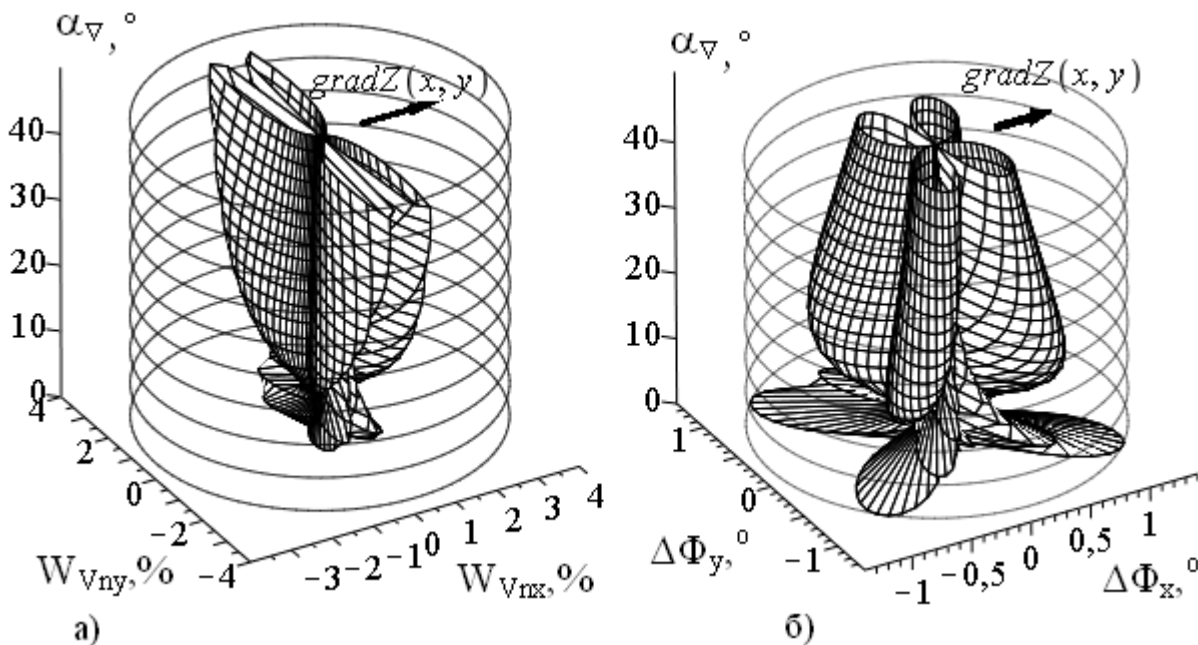


Рис. 2 – Графики в цилиндрических координатах: а) относительной погрешности  $W_{V_n}(\phi, \alpha_\nabla)$ ; б) величины абсолютного отклонения  $\Delta\Phi(\phi, \alpha_\nabla)$

График данной погрешности в цилиндрических координатах приведен на рис. 2-а.

Кроме того, при использовании принципа Гюйгенса, реализуемого ниже, важна не так величина скорости, как ее производная по азимутальному углу, т.к. именно она определяет направление движения. Поскольку производная является тангенсом угла наклона касательной, то относительная погрешность для произ-

водной равна относительной погрешности для данного тангенса, что позволяет оценить максимальное отклонение  $\Delta\Phi$  азимута  $\Phi$  маршрута движения эвакуируемых колонн, вызванное предложенной аппроксимацией в виде

$$\frac{\operatorname{tg}(\Phi + \Delta\Phi) - \operatorname{tg} \Phi}{\operatorname{tg} \Phi} = \frac{\partial V_n(\phi, \alpha_v)/\partial \phi - \partial v_n(\phi, \alpha_v)/\partial \phi}{\partial v_n(\phi, \alpha_v)/\partial \phi}. \quad (6)$$

Решая данное уравнение относительно  $\Delta\Phi$ , получим

$$\Delta\Phi(\Phi, \alpha_v) = \operatorname{arctg} \left( \left( \frac{\partial V_n/\partial \phi - \partial v_n/\partial \phi}{\partial v_n/\partial \phi} + 1 \right) \cdot \operatorname{tg} \Phi \right) - \Phi. \quad (7)$$

График зависимости  $\Delta\Phi(\Phi, \alpha_v)$  представлен на рис. 2-б. Видно, что абсолютное отклонение от истинного направления максимально в условиях равнины и не превышает  $1.4^\circ$ . Таким образом, предложенная аппроксимация индикатрисы не вносит сколь-нибудь существенных искажений при отыскании направлений движения эвакуируемых колонн.

Полученная аппроксимация  $V_n(x, y, \phi)$  проекции индикатрисы скорости движения АС при осуществлении им эвакуации людей позволяет осуществить построение математической модели динамики волнового фронта - границы (изохроны) области транспортной достижимости.

В глобальной системе координат  $XOY$ , привязанной к электронной карте местности, введем в некоторой произвольной точке центр локальной системы координат  $XO''Y$ , ориентированной осью  $O''X$  на восток, а осью  $O''Y$  на север ( $O''X \parallel OX, O''Y \parallel OY$ ). В системе  $XOY$  точка  $O''$  будет иметь координаты  $(O''_x; O''_y)$ .

В т.  $O''$  угол  $\psi$  ( $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ) азимута градиента высоты поверхности рельефа  $Z(x, y)$ , отмеряемый в положительном направлении от оси  $OX$ , равен [6]

$$\psi(x, y) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\partial Z(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} \right), \quad (8)$$

а угол крутизны  $\alpha_{\nabla}$  ( $0 \leq \alpha_{\nabla} \leq \pi/2$ ) склона поверхности рельефа  $Z(x,y)$  в направлении  $\psi$ , отмеряемый от плоскости  $XOY$ , равен [6]

$$\alpha_{\nabla}(x,y) = \arctg \left( \sqrt{\left(\frac{\partial Z(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z(x,y)}{\partial y}\right)^2} \right). \quad (9)$$

Введем еще одну локальную систему координат  $X''O''Y''$ , оси которой повернуты на угол  $\psi$  относительно осей  $O''X$  и  $O''Y$  (рис. 3).

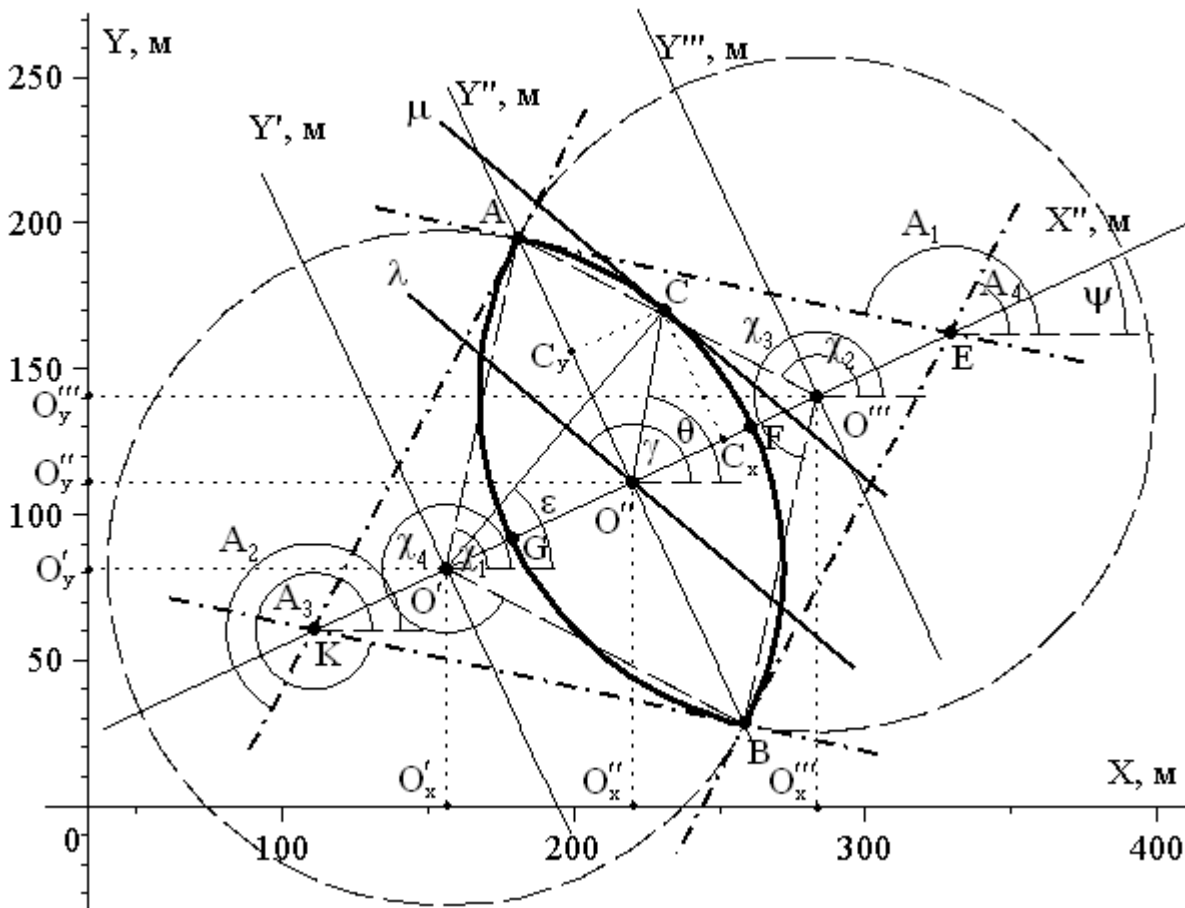


Рис. 3 – Реализация принципа Гюйгенса

Система координат  $X''O''Y''$  привязана к точке  $(O''_x; O''_y)$ , которая, в свою очередь, является текущей точкой  $(X; Y)$  параметрически (параметр  $m$ ) заданного контура  $L(t_i, m)$  границы области транспортной достижимости в дискретный момент времени  $t_i$ . В

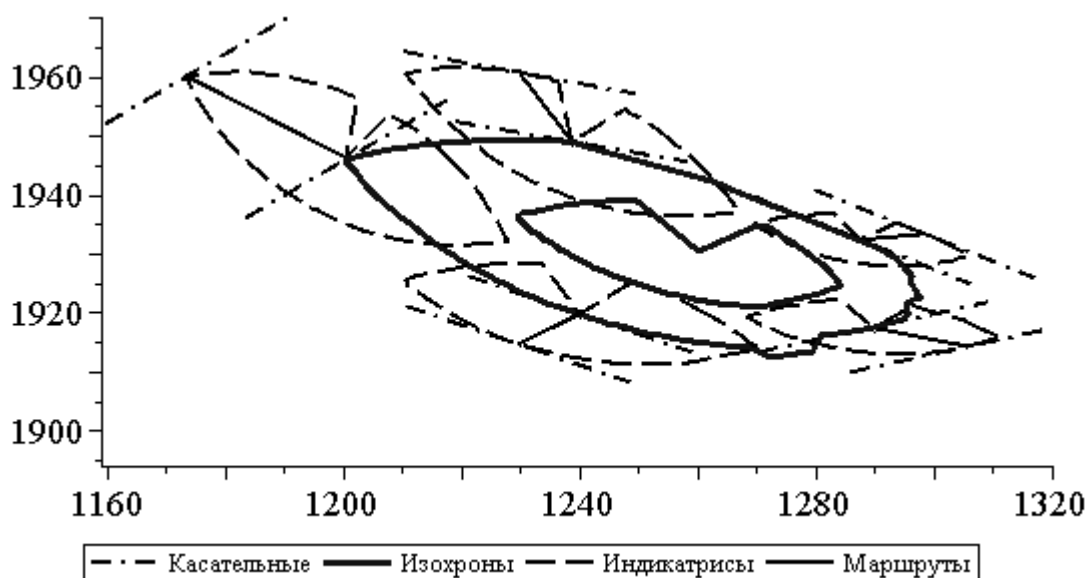
данной точке  $(X(t_i, m); Y(t_i, m))$  к контуру  $L(t_i, m)$  построим касательную  $\lambda$ . Угол ее наклона к оси  $OX$  обозначим  $\gamma$ .

В системе  $XO''Y$  зададим индикатрису (5) с полюсом в начале координат, при этом полярный угол  $\phi$  (и все прочие углы) отмеряются в положительном направлении от оси  $OX$ .

Итерационное построение динамики параметрически заданной границы области транспортной достижимости (изохроны)

$$L(t_{i+1}, m) = \begin{cases} X(t_i, m) + V_{nx}(m, \theta(\gamma)) \cdot \Delta t; \\ Y(t_i, m) + V_{ny}(m, \theta(\gamma)) \cdot \Delta t; \end{cases} \quad (10)$$

где  $\Delta t$  - временной шаг, предполагает использование принципа Гюйгенса для нахождения огибающей семейства вторичных волн. При этом в качестве вторичной волны выступает второе слагаемое выражения (10). Таким образом, реализация положения (10) сводится к нахождению неизвестной зависимости  $\theta(\gamma)$ , где  $\theta$  - азимутальный угол, при котором касательная  $\mu$  к фронту вторичной волны будет иметь тот же наклон, что и касательная  $\lambda$  (рис. 4).



**Рис. 4 – Процедура построения нового контура области транспортной достижимости**



Вначале необходимо рассмотреть возможные диапазоны изменения угла  $\gamma$ , поскольку для разных его значений угол  $\theta$  будет задаваться по-разному.

В системе координат  $XO'Y$  параметрическое уравнение окружности  $(O'; R_2)$  имеет вид

$$\begin{cases} x_{(O'; R_2)} = R_2 \cos \varepsilon; \\ y_{(O'; R_2)} = R_2 \sin \varepsilon, \end{cases} \quad \varepsilon \in [0; 2\pi]. \quad (11)$$

Аналогичное уравнение имеет окружность  $(O''; R_1)$  в системе координат  $XO''Y$ .

Найдем углы  $A_{1...4}$ , которые образуют с осью  $O''X$  касательные  $AE$ ,  $AK$ ,  $BK$ ,  $BE$  к окружностям  $(O'; R_2)$  и  $(O''; R_1)$  в точках  $A$  и  $B$ .

Для касательной  $AE$  имеем - угол  $\chi_1$  между радиусом  $O'A$  и осью  $O'X$  равен

$$\chi_1 = \operatorname{arccctg}\left(\frac{O'O''}{a}\right) + \psi = \operatorname{arccctg}\left(\frac{R_2 - b_2}{a}\right) + \psi. \quad (12)$$

Преимуществом аппроксимации линии  $v_n$  дугами окружностей является то, что касательная  $AE \perp O'A$ , поэтому из прямоугольного  $\Delta O'AE$  находим

$$A_1 = \pi - (\pi/2 - (\chi_1 - \psi)) + \psi = \chi_1 + \pi/2 = \operatorname{arccctg}\left(\frac{R_2 - b_2}{a}\right) + \frac{\pi}{2} + \psi. \quad (13)$$

Учитывая, что  $\operatorname{arccctg} \alpha = \pi/2 - \operatorname{arctg} \alpha$  и нечетность арктангенса, преобразовывая последнее выражение и проделывая аналогичные выкладки для всех вышеперечисленных касательных, получим

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{b_2 - R_2}{a}\right) + \psi; \\
 A_2 &= \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{b_1 - R_1}{a}\right) + \psi; \\
 A_3 &= \operatorname{arctg}\left(\frac{b_1 - R_1}{a}\right) + \psi; \\
 A_4 &= -\operatorname{arctg}\left(\frac{b_2 - R_2}{a}\right) + \psi.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Рассмотрим подробно два принципиально разных частных случая.

I. Пусть  $A_4 < \gamma < A_1$ . Из условия  $\lambda \perp \mu$  следует равенство тангенсов углов наклона данных прямых, т.е.

$$\operatorname{tg}(\gamma - \psi) = \frac{\partial y_{(O'; R_2)} / \partial \varepsilon}{\partial x_{(O'; R_2)} / \partial \varepsilon} = -\operatorname{ctg} \varepsilon.
 \tag{15}$$

Из последнего равенства получаем

$$\varepsilon = \operatorname{arcctg}(-\operatorname{tg}(\gamma - \psi)).
 \tag{16}$$

В свою очередь, для полярного угла  $\theta$  в системе  $XO''Y$  имеем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{OC_{x''}}{O''C_{x''}} + \psi = \frac{R_2 \sin \varepsilon}{R_2 \cos \varepsilon - (R_2 - b_2)} + \psi.
 \tag{17}$$

Из последнего условия с учетом (16) получаем величину угла  $\theta$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{R_2 \sin(\operatorname{arcctg}(-\operatorname{tg}(\gamma - \psi)))}{R_2 \cos(\operatorname{arcctg}(-\operatorname{tg}(\gamma - \psi)) - 1) + b_2}\right) + \psi.
 \tag{18}$$

Выполняя в последнем выражении тригонометрические преобразования, окончательно получим

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{R_2 \cos(\gamma - \psi)}{-R_2 \sin(\gamma - \psi) - (R_2 - b_2) \cdot \operatorname{sign}(\cos(\gamma - \psi))} \right) + \psi. \quad (19)$$

II. Пусть  $A_1 < \gamma < A_2$ . В этом случае, несмотря на то, что касательная в точке  $A$  не существует, из необходимости выполнения условия  $\lambda \parallel \mu$  полагаем, что во всем указанном диапазоне  $\theta = \pi/2 + \psi$ .

Проделав аналогичные выкладки для всех диапазонов изменения угла  $\gamma$  и учитывая знак  $\cos(\gamma - \psi)$  в каждом диапазоне, окончательно получим зависимость азимутального угла  $\theta(\gamma)$  в системе координат  $XOY$

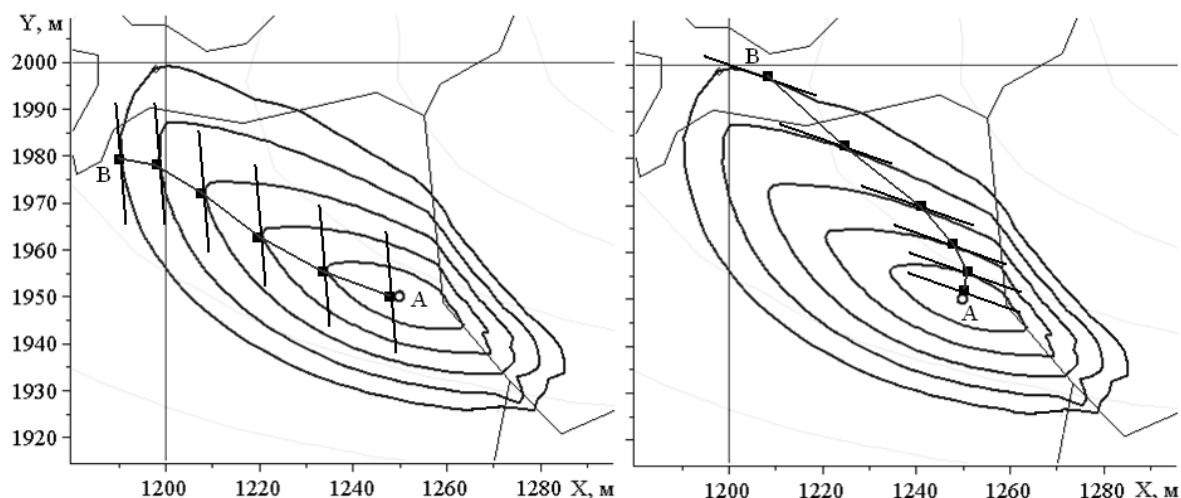
$$\theta(\gamma) = \begin{cases} 3\pi/2 + \psi, & 0 < \gamma \leq A_4; \\ \operatorname{arctg} \left( \frac{-R_2 \cos(\gamma - \psi)}{R_2 \sin(\gamma - \psi) + R_2 - b_2} \right) + \psi, & A_4 < \gamma \leq A_1; \\ \pi/2 + \psi, & A_1 < \gamma \leq A_2; \\ \operatorname{arctg} \left( \frac{-R_1 \cos(\gamma - \psi)}{R_1 \sin(\gamma - \psi) + R_1 - b_1} \right) + \pi + \psi, & A_2 < \gamma \leq A_3; \\ 3\pi/2 + \psi, & A_3 < \gamma \leq 2\pi. \end{cases} \quad (20)$$

Подстановка выражения (20) в (10) решает задачу получения динамического фронта волны – границы области транспортной достижимости. При этом в качестве  $L(t_0, m)$  может выступать как отдельная точка, так и граница эвакуируемого населенного пункта.

Полученные семейства изохрон позволяют осуществить нахождение наискорейшего пути  $\ell^*$  следования из точки  $A$  (начала маршрута эвакуации) в точку  $B$  (расположенную вне зоны действия поражающих факторов ЧС), т.е. решить оптимизационную задачу

$$\ell^* = \arg \left( \min_{\ell \in L_{AB}} (T(\ell)) \right). \quad (21)$$

При этом осуществляется учет локальных топографических свойств местности вдоль маршрута следования (рис. 5), который представляет собой лучевую траекторию в неоднородной среде [4].



**Рис. 5 – Примеры отыскания оптимальных (наискорейших) маршрутов движения из точки *A* в точку *B***

Полномасштабный учет свойств местности методами географических информационных систем [7] позволяет, используя предложенную модель, осуществить оперативное построение маршрутов движения автосредств, производящих экстренную эвакуацию населения в условиях бездорожья.

**Выводы.** Реализация волнового алгоритма в нерешеточной постановке позволяет осуществлять нахождение маршрутов экстренной эвакуации населения населенного пункта или крупного промышленного объекта в условиях разрушения или недоступности транспортной сети.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кемурджиан А.Л. Метод встречных волн в задаче выбора трассы подвижного робота / А.Л. Кемурджиан, А.К. Платонов, В.Н. Каширин и др. // М: Препр./Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша АН СССР. - 1985. - № 52.
2. Ушанов С.В. Оптимальная маршрутизация при управлении борьбой с лесными пожарами / С.В. Ушанов, О.В. Фадеев // Хвойные бореальные зоны. - Красноярск: СибГТУ. - 2007. - №4-5, - С. 405-407.

3. Данилкин Ф.А. Трассировка маршрута движения по цифровым картам местности / Ф.А. Данилкин, Д.С. Наумов // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. Вып. 31. – Рязань: РГРТУ. – 2010. - № 1. - С.86-88.
4. Хмелевской В.К. Геофизические методы исследований. В.К. Хмелевской, Ю.И. Горбачев, А.В. Калинин и др. Петропавловск-Камчатский: изд-во КГПУ, 2004. - 232 с.
5. Беляев В.Ю. Модель азимутальной скорости движения автотранспорта, осуществляющего эвакуацию населения в условиях бездорожья /В.Ю. Беляев, А.А. Тарасенко // Проблемы надзвичайних ситуацій. – 2012. - Вип. 16. - С. 16-28.
6. Абрамов Ю.А. Моделирование пожаров, их обнаружения, локализации и тушения. Ю.А. Абрамов, А.Е. Басманов, А.А. Тарасенко – Харьков: НУГЗУ, 2011. – 927 с.
7. Абрамов Ю.А. Формирование априорной информации для системы ликвидации последствий чрезвычайной ситуации / Ю.А. Абрамов, А.А. Тарасенко // Проблемы надзвичайних ситуацій. - 2007.- Вип. 6.-С. 11-22.

Беляев В.Ю., Тарасенко О.А.

#### **Використання хвильового алгоритму для побудови маршрутів евакуації населеного пункту в умовах бездоріжжя**

Запропоновано математичну модель пошуку оптимального маршруту евакуації та її реалізація у вигляді ітераційного алгоритму біжної хвилі стосовно до границі області транспортної досяжності, дозволяє врахувати особливості реальної обстановки в зоні надзвичайної ситуації. Запропоновано апроксимація рівняння раніше отриманої індикатрисі швидкості евакуації, оцінена похибка даної апроксимації.

**Ключові слова:** евакуація населення, швидкість руху, хвильовий алгоритм, оптимальний маршрут

Belyaev V.U., Tarasenko O.A.

#### **Use of wave algorithm for creation of routes of evacuation of the settlement in cross-country conditions**

The mathematical model of search of an optimum route of evacuation and its realization in the form of iterative algorithm of a running wave in relation to border of area of the transport approachability, allowing to consider features of a real situation in a zone of an emergency situation is offered. Approximation of the equation earlier received indicatrix is offered evacuation speed, the error of this approximation is estimated.

**Key words:** evacuation of population, speed of movement, wave algorithm, optimum route