

*Г.В. Іванець, к.т.н., доцент, НУЦЗУ,
І.О. Толкунов, к.т.н., заст. нач. каф., НУЦЗУ,
Є.І. Стецюк, ст. викладач, НУЦЗУ*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РАЦІОНАЛЬНОГО ВИКОРИСТАННЯ СИЛ І ЗАСОБІВ ПІДРОЗДІЛІВ ДСНС УКРАЇНИ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ ЗА ПРИЗНАЧЕННЯМ

(представлено д-ром техн. наук Куценком Л.М.)

Розглянута можливість вирішення задач оптимального розподілу сил і засобів (ресурсів) підрозділів ДСНС для успішного виконання завдань за призначенням у встановлені терміни з мінімальними затратами на основі математичної задачі лінійного програмування.

Ключові слова: підрозділи ДСНС, математична модель, лінійне програмування, цільова функція, оптимальний план задачі лінійного програмування.

Постановка проблеми. Зміни, що відбуваються, у суспільстві й в умовах застосування підрозділів Державної служби України з надзвичайних ситуацій (ДСНС) пред'являють високі вимоги до якості рішення задач управління силами і засобами ДСНС [1,2]. У той же час обсяг і складність цих задач безупинно зростають. Управління силами ДСНС в цих умовах повинно ґрунтуватися на всебічному урахуванні факторів, що впливають на можливість виникнення надзвичайних ситуацій, спиратися на глибоку оцінку можливої обстановки, точні розрахунки, обґрунтовані рішення, ретельне планування і достовірну оцінку очікуваних результатів застосування сил і засобів ДСНС з найменшими витратами.

Істотну допомогу керівникам підрозділів ДСНС в оцінці обстановки, підготовці пропозицій для прийняття рішення, виборі раціональних варіантів розподілу сил і засобів для успішного виконання поставлених завдань з найменшими витратами надає застосування математичних моделей і інформаційно-розрахункових задач, реалізованих на ПЕОМ.

В умовах дефіциту коштів, спеціалістів і засобів виникає проблема раціонального розподілу сил та засобів підрозділів ДСНС для виконання поставлених завдань з найменшими затратами.

Аналіз останніх досліджень і публікацій показав, що питання використання сил і засобів підрозділів ДСНС України для виконання завдань за призначенням все більш активно обговорюється і досліджується відносно їх оптимального залучення по відношенню до матеріальних затрат [1,2]. Виникає задача розробки пропозицій щодо викорис-

тання математичних методів моделювання для вирішення задач управління розподілом наявних сил та засобів з обмеженнями їх використання для успішного виконання підрозділами ДСНС України відповідних завдань з найменшими затратами.

Постановка завдання та його вирішення. Отже, в роботі вирішене завдання щодо розробки пропозицій, які стосуються використання лінійних математичних моделей для вирішення задач раціонального розподілу наявних ресурсів підрозділів ДСНС України для успішного виконання завдань за призначенням у встановлені терміни з мінімальними матеріальними затратами.

Під моделлю будемо розуміти такий матеріальний або уявний об'єкт, який у процесі дослідження замінює собою об'єкт-оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові відомості про об'єкт-оригінал. Моделювання, у такому випадку, являє собою процес побудови, вивчення й застосування моделей [3]. Головна особливість моделювання полягає в тому, що це метод опосередкованого пізнання за допомогою об'єктів-замінників. Модель виступає як інструмент пізнання, який дослідник ставить між собою і об'єктом з метою вивчення останнього, тобто об'єкт розглядається ніби через «призму» його модельного подання. Процес моделювання, таким чином, містить у собі три елементи: суб'єкт дослідження (дослідник), об'єкт дослідження та модель. Ситуацію ілюструє рис. 1.



Рис. 1. Роль моделі в процесі дослідження

Необхідність використання методу моделювання визначається тим, що багато об'єктів (або проблеми, що стосуються цих об'єктів) безпосередньо досліджувати або зовсім неможливо, або ж ці дослідження вимагають занадто високих витрат часу, засобів, а інколи містять навіть небезпеку для навколишнього середовища і людей.

Очевидно, що всі існуючі моделі можуть бути умовно розділені на два класи – моделі матеріальні, тобто об'єктивно існуючі (до яких можна «доторкнутись руками»), і моделі абстрактні, існуючі у свідомості людини. Одним з підкласів абстрактних моделей є моделі математичні.

Математична модель – це абстракція реальної дійсності (світу), в якій співвідношення між реальними елементами, а це саме ті, що цікавлять дослідника, замінені співвідношеннями між математичними категоріями. Ці співвідношення зазвичай подаються у формі рівнянь та

(або) нерівностей, співвідношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи чи протікання процесу, що моделюється [6,8].

Застосування математичних методів істотно розширює можливості щодо планування і виконання завдань підрозділами ДСНС, підвищує якість прийнятих управлінських рішень.

Математичні моделі, відображаючи за допомогою математичних співвідношень основні властивості процесів і явищ, уявляють собою ефективний інструмент дослідження складних надзвичайних ситуацій і процесу використання наявних ресурсів при виконанні завдань підрозділами ДСНС.

Принципи побудови економіко-математичних моделей

1. **Принцип достатності вихідної інформації.** У кожній моделі повинна використовуватися тільки та інформація, що відома з точністю, необхідною для одержання результатів моделювання.

2. **Принцип інваріантності (однозначності) інформації** вимагає, щоб вхідна інформація, використовувана в моделі, була незалежна від тих параметрів досліджуваної системи, які ще невідомі на даній стадії дослідження.

3. **Принцип спадкоємності.** Зводиться до того, що кожна наступна модель не повинна порушувати властивостей об'єкта, встановлених або відображених у попередніх моделях.

4. **Принцип ефективної реалізованості.** Необхідно, щоб модель могла бути реалізована за допомогою сучасних обчислювальних засобів.

Проаналізуємо послідовність і зміст етапів одного циклу математичного моделювання (рис. 2).

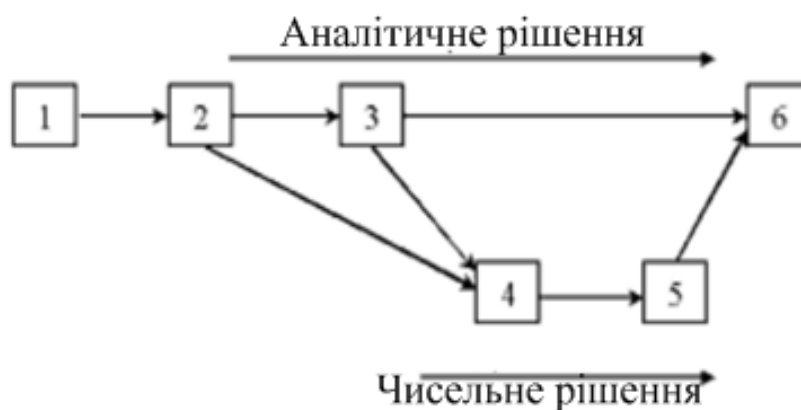


Рис. 2. Етапи економіко-математичного моделювання

1. **Постановка проблеми і її якісний аналіз.** Головне на цьому етапі – чітко сформулювати сутність проблеми, визначити прийняті допущення, а також визначити ті питання, на які потрібно отримати відповідь. Етап включає виділення найважливіших рис і властивостей

досліджуваного об'єкта чи процесу, основних залежностей, що зв'язують його елементи. Тут же відбувається формулювання гіпотез, хоча б попередньо пояснюючих поведінку об'єкта чи процесу.

2. Побудова математичної моделі. Це етап формалізації задачі, тобто вираження її у вигляді математичних залежностей і відносин (функцій, рівнянь, нерівностей, схем). Як правило, спочатку визначається тип математичної моделі, а потім уточнюються деталі. Неправильно думати, що, чим більше факторів ураховує модель, тим краще вона працює й дає кращі результати. Зайва складність моделі ускладнює процес дослідження. При цьому потрібно враховувати не тільки реальні можливості інформаційного й математичного забезпечення, але й зіставляти витрати на моделювання з отримуваним ефектом (при зростанні складності моделі приріст витрат може перевищити приріст ефекту).

3. Математичний аналіз моделі. Ціль – виявлення загальних властивостей і характеристик моделі. Застосовуються чисто математичні прийоми дослідження. Найбільш важливий момент – доказ існування рішень у сформульованій моделі. Якщо вдасться довести, що задача не має рішення, то необхідність у наступній роботі з даного варіанта моделі відпадає: варто скорегувати або постановку задачі, або способи її математичної формалізації.

4. Підготовка вихідної інформації. Чисельне моделювання висуває жорсткі вимоги до вихідної інформації. У той же час реальні можливості отримання інформації істотно обмежують вибір використовуваних моделей. При цьому приймається до уваги не тільки можливість підготовки інформації (за певний термін), але й витрати на підготовку відповідних інформаційних масивів. Ці витрати не повинні перевищувати ефекту від використання даної інформації.

5. Чисельне рішення. Це розробка алгоритмів, програм і безпосереднє проведення розрахунків на комп'ютері.

6. Аналіз адекватності моделі та отриманих результатів і їхнє застосування. На заключній стадії перевіряються правильність, повнота й ступінь практичної застосовності отриманих результатів.

Природно, що після кожної з перерахованих стадій можливе повернення до однієї з попередніх стадій, якщо буде потреба уточнення інформації, перегляду результатів виконання окремих етапів.

Оптимізаційні математичні моделі.

Лінійне програмування – напрямок математики, що вивчає методи рішення екстремальних задач, які характеризуються лінійною залежністю між змінними й лінійним критерієм оптимальності.

До математичних задач лінійного програмування відносять дослідження конкретних виробничо-господарських ситуацій, які в тому чи іншому виді інтерпретуються як задачі про оптимальне використання обмежених ресурсів.

До таких задач можна віднести задачу оптимального розподілу наявних сил і засобів (ресурсів) підрозділів ДСНС для успішного виконання поставлених завдань з найменшими затратами.

Математична модель будь-якої задачі лінійного програмування включає: цільову функцію, оптимальне значення якої (максимум або мінімум) потрібно відшукати; обмеження у вигляді системи лінійних рівнянь або нерівностей; вимогу невід'ємності змінних [6].

Загальна лінійна математична модель процесів та явищ – так звана загальна задача лінійного програмування подається у вигляді [4,5,7]:

1) цільова функція:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max (\min), \quad (1)$$

2) обмеження:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\{ \leq, =, \geq \} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\{ \leq, =, \geq \} b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\{ \leq, =, \geq \} b_m, \end{aligned} \quad (2)$$

3) вимога невід'ємності:

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \dots, \quad (3)$$

де a_{ij} , b_i , c_j – задані постійні величини, ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$).

Завдання полягає в знаходженні оптимального значення функції (1) при дотриманні обмежень (2) і (3).

Систему обмежень (2) називають функціональними обмеженнями задачі, а обмеження (3) – прямими. Отже, потрібно знайти такі значення змінних x_1, x_2, \dots, x_n , які задовольняють умови (2) і (3), і цільова функція (1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Розглянемо задачу оптимального розподілу сил і засобів (ресурсів) підрозділів ДСНС для успішного виконання поставлених завдань у встановлені терміни з мінімальними затратами.

Нехай підрозділи ДСНС мають в своєму розпорядженні деякі сили і засоби, кількість яких обмежена. Для виконання поставленого завдання підрозділами ДСНС необхідні виконати ряд робіт з найбільшою ефективністю та найменшими затратами. Виконання кожної роботи для загального успіху виконання завдання потребує певних затрат. В подальшому сили і засоби підрозділів ДСНС для виконання завдань будемо називати ресурсами. Нехай в підрозділі ДСНС є m видів ресурсів R_1, R_2, \dots, R_m (кількість спеціалістів різної кваліфікації, робочий час, обладнання і т.п.) в кількості b_1, b_2, \dots, b_m одиниць кожного виду (табл. 1). Кожна одиниця ресурсу R_i коштує y_i умовних одиниць.

Табл. 1. Розподіл ресурсів відповідно до типів робіт

Ресурси		Типи робіт						Запаси ресурсів
Вид	Вартість	T_1	T_2	...	T_j	...	T_n	
R_1	y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
R_2	y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
...
R_i	y_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
...
R_m	y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
Затрати на виконання одного етапу кожної роботи ум. од.		c_1	c_2	...	c_j	...	c_n	

На кожен етап роботи T_j витрачається a_{ij} ресурсів i -го виду. Кожен етап роботи несе затрати c_j умовних одиниць.

Необхідно визначити, яку кількість і яких ресурсів із наявних необхідно використати для виконання завдання з найменшими затратами.

Запишемо умову задачі математично. Позначимо кількість етапів робіт T_1, T_2, \dots, T_n , які необхідно виконати для вирішення поставленого завдання, символами:

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Умови виконання завдання обмежуються наявним запасом ресурсів, яких повинно вистачити на виконання завдання:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 ; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 ; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m . \end{aligned} \right\}$$

Ці умови можна записати коротше:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j &\leq b_1 ; \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j &\leq b_2 ; \\ \dots \dots \dots \dots & \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j &\leq b_m . \end{aligned} \right\} \text{ або ще коротше } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

де X – вектор змінних; C – вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції; A – матриця коефіцієнтів при змінних у системі обмежень; B_0 – вектор вільних членів.

Будемо використовувати наступні поняття. Опорний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, за якого цільова функція F (1) досягає в нашому випадку мінімального значення, називається оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування [3,4,8]. Оптимальний план є розв'язком задачі лінійного програмування.

Отже, у загальному вигляді задача математичного програмування формулюється так: знайти такі значення змінних x_j , щоб цільова функція набувала екстремального (в даному випадку мінімального значення).

Рішення подібних задач лінійного програмування (ЗЛП) можна виконувати у табличному редакторі Microsoft Excel за допомогою пакету програм «Пошук рішення».

Приведемо приклад вирішення подібних задач. Нехай для виконання завдань підрозділом ДСНС передбачається, що кваліфікація фахівців має бути не нижчою 76%, а відхилення їх від своєї кваліфікації – не більшим, ніж 0,3%. Для виконання завдання підрозділом використовуються спеціалісти чотирьох категорій. Дані про наявність спеціалістів, які будуть разом виконувати поставлені завдання, затрати на їх використання та відхилення їх від своєї кваліфікації, наведені в табл. 2.

Табл. 2. Використання спеціалістів за категоріями при виконанні завдань за призначенням відповідно до їх кваліфікації та затрат

Показник	Категорії спеціалістів			
	№1	№2	№3	№4
Кваліфікація спеціалістів, %	68	72	80	90
Відхилення від своєї кваліфікації, %	0,35	0,35	0,30	0,20
Наявна кількість, чол.	10	7	8	5
Затрати на використання спеціалістів, умов. од./чол.	40	45	60	90

Необхідно визначити, скільки спеціалістів кожної категорії треба використати для того, щоб призначити розрахунок в кількості 15 осіб із загальною кваліфікацією не нижче 76% з мінімальними витратами коштів.

Побудова математичної моделі.

Позначимо через x_j кількість спеціалістів j -ї категорії в розрахунку, $j = 1, 2, 3, 4$.

Перше обмеження забезпечує потрібне значення показника кваліфікації спеціалістів в розрахунку:

$$68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 15.$$

Відхилення кваліфікації спеціалістів в розрахунку не має перевищувати 0,3%:

$$0,35x_1 + 0,35x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \leq 0,3 \cdot 15,$$

а загальна кількість спеціалістів розрахунку має дорівнювати 15:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15.$$

Використання кожної категорії спеціалістів не має перевищувати їх наявної кількості: $x_1 \leq 10$; $x_2 \leq 7$; $x_3 \leq 8$; $x_4 \leq 5$.

Загальні витрати на використання спеціалістів в розрахунку визначаються за формулою:

$$F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4.$$

Загалом, математична модель задачі має вигляд:

$$F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4 \rightarrow \min$$

за умов:

$$\begin{cases} 68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 1140; \\ 0,35x_1 + 0,35x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \geq 4,5; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15; \\ x_1 \leq 10; \\ x_2 \leq 7; \\ x_3 \leq 8; \\ x_4 \leq 5. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,4})$$

Оптимальним розв'язком (планом) рішення цієї задачі буде:

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (0, 7, 8, 0),$$

а цільова функція при цьому дорівнює $F = 795$. Таким чином, щоб призначити розрахунок в кількості 15 осіб із загальною кваліфікацією не нижче 76% з мінімальними витратами коштів необхідно взяти 7 спеціалістів категорії №2 і 8 спеціалістів категорії №3. Затрати на використання спеціалістів в розрахунку при цьому будуть найменшими і складатимуть 795 умовних одиниць.

Висновки. Розглянуто можливість вирішення задач оптимального розподілу сил і засобів (ресурсів) підрозділів ДСНС України для успішного виконання ними завдань за призначенням в установлені терміни з мінімальними затратами на основі математичної задачі лінійного програмування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кодекс цивільного захисту України: за станом на 02 листопада 2012 р. / Верховна Рада України. – Офіц. вид. – К.: Парлам. вид-во, 2012 р. – №5403-VI, № 34-35, ст.458. – (Бібліотека офіційних видань).
2. Емельянов В.М. Защита населения и территорий в чрезвычайных ситуациях / В.М. Емельянов. – М., 2002. – С. 279-289.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1980. – 206 с.
4. Катренко А.В. Дослідження операцій. Підручник / А.В. Катренко. – Львів: «Магнолія Плюс», 2004. – 549 с.
5. Кутковський В.Я. Дослідження операцій: Навчальний посібник / В.Я. Кутковський. – Київ: Вид-во ТОВ «Видавничий дім «Професіонал», 2004. – 350 с.
6. Буланов Г.С. Математичні методи дослідження операцій. Навчальний посібник. / Г.С. Буланов, В.О. Паламарчук. – Харків: ДДМА, 2005. – 84 с.
7. Давыдов В.Г. Исследование операций / В.Г. Давыдов. – М.: Высшая школа, 1990. – 384 с.
8. Колодяжный В.М. Математическое программирование и элементы теории «Исследования операций». Учебное пособие / В.М. Колодяжный. – Харьков: Национальный аэрокосмический университет «Харьковский авиационный институт», 2001. – 229 с.

Г.В. Иванец, И.А. Толкунов, Е.И. Стецюк

Математическая модель рационального использования сил и средств подразделений ГСЧС Украины для выполнения задач по предназначению

Рассмотрена возможность решения задач оптимального распределения сил и средств (ресурсов) подразделений ГСЧС для успешного выполнения задач по предназначению в установленные сроки с минимальными затратами на основе математической задачи линейного программирования.

Ключевые слова: подразделения ГСЧС, математическая модель, линейное программирование, целевая функция, оптимальный план задачи линейного программирования.

G.V. Ivaniets, I.A. Tolkunov, Ye.I. Stetsiuk

A mathematical model of the rational use of energy and resources departments SES of Ukraine to fulfill their missions

The possibility of solving optimal distribution of forces and means (resources) subdivisions of the State Emergencies Service of Ukraine for the successful implementation of assigned tasks in a timely manner with minimal cost on the basis of the mathematical problem of linear programming is given.

Keywords: subdivisions SES of Ukraine, mathematical model, linear programming, the objective function, the optimal plan of the linear programming.