

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ  
УКРАЇНИ**

**КАФЕДРА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН**

**Методичні рекомендації  
до лабораторного заняття  
з навчальної дисципліни “Фізика”**

**ВИЗНАЧЕННЯ  
МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ТІЛ**

Обговорено та затверджено на засіданні  
кафедри фізико-математичних дисциплін  
Протокол № \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 201 р.

## План-конспект лабораторного заняття

### «Визначення моментів інерції тіл»

**Тема заняття:** Визначення момента інерції маятника Обербека.

**Мета заняття:**

— *навчальна:* навчити використовувати знання законів динаміки для знаходження фізичних величин, пов'язаних з цими законами, зокрема моменту інерції тіла. Ознайомити слухачів з методами наукового пізнання на практиці;

— *виховна:* виховувати інформаційну культуру студентів, увагу, дисциплінованість, самоконтроль;

— *розвиваюча:* розвивати впізнавальний інтерес, мислення, уміння використовувати на практиці фізичні прилади. Забезпечити розвиток експериментальних умінь слухачів і навичок проведення вимірювань фізичних величин.

**Тип заняття:** закріплення вивченого матеріалу.

**Вид заняття:** лабораторна робота.

**Методи навчання:**

*пояснювально-ілюстративний:*

– більш конкретне, наочне пояснювання слухачам навчального матеріалу;

*частково-пошуковий метод:*

– пошук слухачами відповідей на сукупність логічних запитань з конкретної теми, спрямованих на виконання лабораторної роботи.

**Опорні терміни і поняття:** динаміка абсолютно твердого тіла, маятник Обербека, другий закон Ньютона, закон динаміки обертального руху, момент сили, момент інерції.

**Основні джерела інформації:**

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т. Загальний курс фізики: Т.1.: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.: Техніка, 1999. – 269с., ст. 32-48, 57-61, 86-98.

2. Борисенко В. Г. Фізика. Практикум. Лабораторні роботи. Х .: НУЦЗУ, 2010. – ст. 14-22.

3. ФІЗИКА. Методичні рекомендації з організації самостійної роботи студентів при вивченні дисципліни. / Борисенко В. Г., Деркач Ю.Ф., Кривцова В.І., Умеренкова К.Р. / Х .: НУЦЗУ, 2010, 63 с. (електронний варіант).

### **План заняття та розподіл часу**

1. Організаційний етап – 5хв:
  - нагадування правил техніки безпеки для перебування в лабораторії, та під час виконання лабораторної роботи;
  - перевірка наявності запису лабораторної роботи в журналі звітів.
2. Підготовка до виконання лабораторної роботи – 10хв:
  - перевірка домашнього завдання;
  - перевірка готовності до роботи.
3. Виконання лабораторної роботи – 55хв:
  - підготовка лабораторної установки до роботи;
  - проведення прямих і непрямих вимірів, знаходження необхідних похибок вимірів, оформлення таблиць та графіків. Формулювання висновку.
4. Підведення підсумків заняття – 5хв.
5. Домашнє завдання – 5 хв



# НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ  
ДИСЦИПЛІН

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА

## ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ТІЛ

Укладачі:

В.Г. Борисенко, В.І. Кривцова, К.Р. Умеренкова

Харків  
2019

**Мета роботи:** експериментальна перевірка основного рівняння обертального руху та залежності параметрів останнього від геометрії системи та зовнішніх сил. Визначення моментів інерції твердих тіл.

### Короткі теоретичні відомості

Як відомо, довільний рух твердого тіла можна описати як сукупність двох рухів: *поступального* та *обертального*. За поступального руху всі точки рухаються так, що довільна пряма, яка зв'язана з тілом, залишається паралельною самій собі. Це означає, що всі точки тіла одержують однакові переміщення і для опису руху не обов'язково слідкувати за всіма точками тіла, а достатньо описати рух однієї точки (наприклад, центру інерції). У свою чергу рух матеріальної точки описує другий закон Ньютона, який має вигляд

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1.1)$$

де  $\vec{F}$  – сума всіх зовнішніх сил, що діють на тіло (точку),  $\vec{p}$  – імпульс тіла (точки).

За обертального руху точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на прямій, що має назву осі обертання. Результати дослідів і життєвий досвід показують, що за обертального руху результат дії сили залежить не тільки від її величини та напрямку, але і від положення точки прикладання вектора сили  $\vec{F}$  відносно осі (точки) обертання. Наприклад, у побуті, відкриваючи або закриваючи двері, ми розуміємо, що результат дії сили, якою ми діємо на двері, буде тим кращим, чим далі від осі обертання ми діємо. Оскільки положення точки прикладання сили характеризується радіус-вектором  $\vec{r}$ , то очевидно, що цей вектор повинен входити в рівняння обертального руху. Тому при обертальному русі роль, аналогічну до ролі сили, грає векторний добуток  $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$ , що має назву *моменту сили відносно нерухомої точки*, а роль, аналогічну ролі імпульсу, грає інший векторний добуток  $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$ , що має назву *моменту імпульсу відносно нерухомої точки*. Тобто, помноживши обидві частини рівняння (1.1) векторно на  $\vec{r}$ , одержимо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (1.2)$$

Це рівняння структурно ідентичне до рівняння (1.1), має назву *рівняння моментів* і справедливе не тільки для обертального руху.

Практично важливим є випадок *обертання навколо нерухомої осі z*. Для довільної сили  $\vec{F}$ , що діє на тіло (рис.1.1), єдиною її складовою, яка приводить тіло в обертальний рух, є її складова  $\vec{F}_\tau$ , що дотична до кола обертання точки А прикладання сили. Дійсно, момент сили  $\vec{F}_\square$  (рис.1.1) не створює обертання, він призводить тільки до вигинання осі. Сила  $\vec{F}_\perp$  також до обертання не приводить, оскільки проходить через вісь обертання

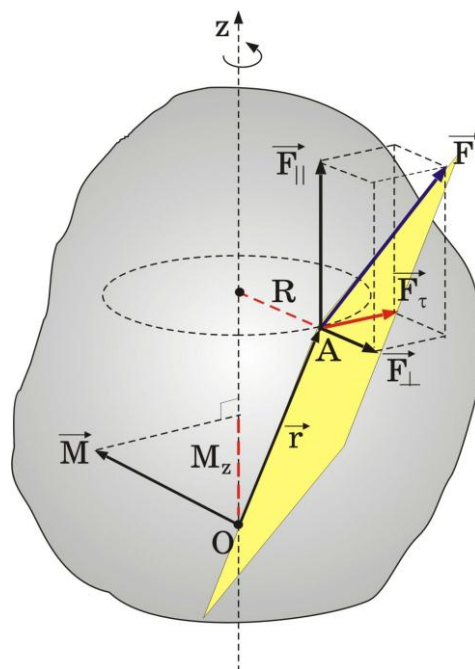


Рис. 1.1. Сили і моменти, що діють на тверде тіло при обертальному русі

і її момент дорівнює нулю. Тому до обертання приводить тільки момент складової  $\vec{F}_\tau$ , який дорівнює за величиною

$$M_z = F_\tau R, \quad (1.3)$$

де  $R$  – плече сили  $\vec{F}_\tau$ . Величина  $M_z$  є проекцією моменту  $\vec{M}$  на вісь обертання (рис.1.1) і має назву *моменту сили відносно осі z*. Можна показати, що момент імпульсу  $L_z$  відносно цієї ж осі дорівнює  $L_z = I_z \omega_z$ , де  $I_z = \sum_i m_i R_i^2$  – *момент інерції* системи відносно осі  $z$ , а  $\omega_z$  – кутова швидкість обертання тіла. Тоді рівняння (1.2) записується у вигляді

$$\frac{d(I_z \omega_z)}{dt} = M_z. \quad (1.4)$$

Якщо ж система являє собою тверде тіло або незмінну систему матеріальних точок, що обертаються навколо нерухомої осі  $z$ , то для цього випадку  $I_z = \text{const}$ . Тоді з (1.4) одержимо

$$I_z \varepsilon_z = M_z, \quad (1.5)$$

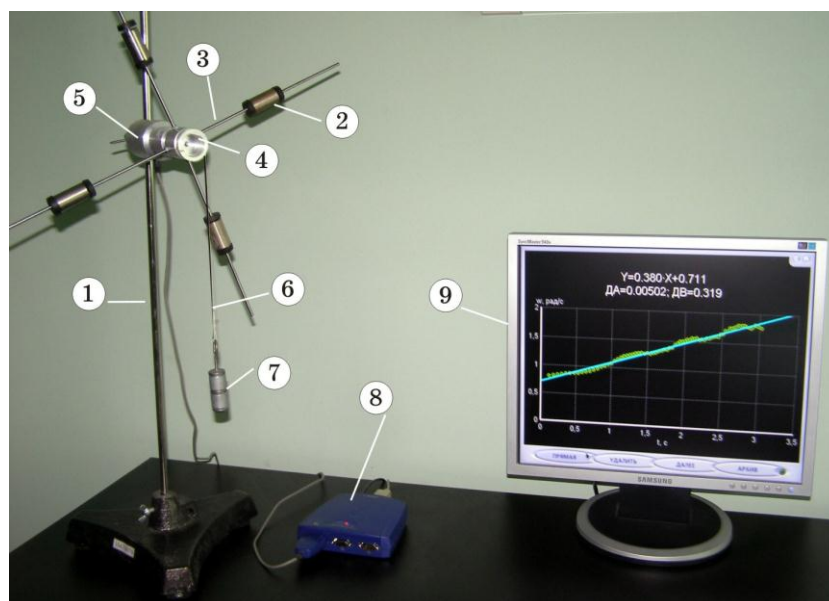
де  $\varepsilon_z$  – кутове прискорення обертального руху навколо осі  $z$ . Це – *рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі*.

Порівнюючи його з другим законом Ньютона, легко зробити висновок, що момент інерції грає в обертальному русі таку ж роль, як і маса в рівнянні (1.1). Отже момент інерції відповідає за інертні властивості тіл, що обертаються, і при однаковому моменті сил, що діє на два різних тіла, більше кутове прискорення одержує те тіло, у якого момент інерції відносно даної осі обертання менший.

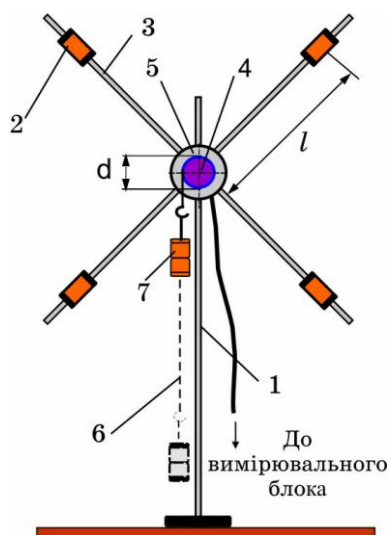
Рівняння динаміки обертального руху дозволяє експериментально визначити момент інерції тіла, якщо всі інші параметри в рівнянні відомі. Це особливо доцільно тоді, коли тіло має складну, несиметричну форму або ж неоднорідне за складом речовини.

## Опис лабораторної роботи

В даній роботі для перевірки законів та співвідношень обертального руху та визначення моменту інерції тіл використовується хрестоподібний маятник (маятник Обербека) – прилад, зовнішній вигляд якого наведений на рис. 1.2а, а схематичне зображення – на рис. 1.2б. Він складається з чотирьох стержнів 3 з рухомими тягарцями 2 на кожному з них, муфти 5 з датчиком кутової швидкості всередині і шківів 4, що закріплені на штативі 1. Датчик кутової швидкості з'єднаний через вимірювальний блок 8 з комп'ютером. Шків у з'єднанні зі стержнями може обертатися навколо нерухомої осі, яка спрямована перпендикулярно до площини рисунка (рис. 1.2б) і проходить крізь центр шківів. На шків намотано нитку 6, яка одним кінцем закріплена на ободі шківів. До другого її кінця приєднується набірний вантаж 7, масу якого можна регулювати. Якщо маятник знаходиться в нерівноважному стані, то виникає обертальний момент, під дією якого відбувається *обертальний рух шківів* зі стержнями і, одночасно, *поступальний рух вантажу*. Обертальний момент можна змінювати, маніпулюючи сумарною масою вантажу. Величину моменту інерції маятника Обербека можна регулювати, пересуваючи тягарці вздовж стержнів.



а



б

Рис. 1.2. Зовнішній вигляд лабораторної роботи (а) та схематичне зображення (б) маятника Обербека. Позначення: 1 – штатив; 2 – тягарці; 3 – стержень; 4 – шків; 5 – муфта з датчиком кутової швидкості; 6 – нитка; 7 – збірний вантаж; 8 – вимірювальний блок; 9 – монітор.

Сили, що діють на маятник за наявності вантажу, зображені на рис. 1.3. Це сила тяжіння  $m\vec{g}$ , де  $m$  – маса вантажу, а  $g$  – прискорення вільного падіння; сила натягу нитки  $\vec{T}$ , яка створює обертальний момент  $M_0 = TR$ , де  $R$  – радіус шківа та сила тертя  $\vec{F}_{mp}$ , що створює обертальний момент  $\vec{M}_{mp}$ , спрямований протилежно до  $\vec{M}_0$ . В процесі руху вантажу на



маятник діє також сила опору повітря, якою ми нехтуємо. Під дією

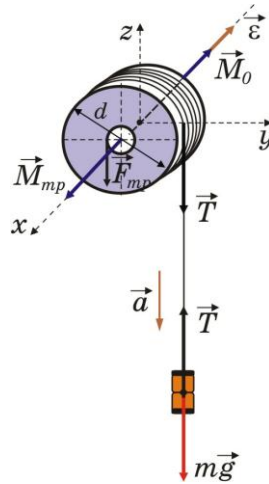


Рис.1.3. Схема сил та та моментів сил, що діють на шків маятника  
Обербека

цих сил вантаж рухається поступально з прискоренням  $\vec{a}$ , а шків обертається з кутовим прискоренням  $\vec{\varepsilon}$  (рис. 1.3). Рівняння динаміки поступального руху вантажу в проекціях на вісь  $z$  має вигляд

$$-ma = T - mg, \quad (1.6)$$

а рівняння динаміки обертального руху в проекціях на вісь  $x$

$$-I\varepsilon = -M_0 + M_{mp}, \quad (1.7)$$

де  $I$  – момент інерції маятника відносно нерухомої осі обертання ( $x$ ).

Із рівняння поступального руху знайдемо силу натягу нитки, яка дорівнює

$$T = mg - ma = m(g - a). \quad (1.8)$$

Якщо вважати, що ковзання між поверхнею шківа та ниткою відсутнє, то величина тангенціального прискорення зовнішніх точок шківа дорівнює величині прискорення  $a$  поступального руху вантажу. Тоді можна використати зв'язок між  $a$  і  $\varepsilon$ , який має вигляд  $a = \varepsilon R$ , і записати величину обертального моменту  $M_0$  в рівнянні (1.7) у формі

$$M_0 = TR = m(g - \varepsilon R)R. \quad (1.9)$$

Тоді рівняння обертального руху (1.7) набуде вигляду

$$I\varepsilon = m(g - \varepsilon R)R - M_{mp}. \quad (1.10)$$

Для виключення невідомого моменту сил тертя можна виконати експеримент двічі з різними вантажами масами  $m_1$  і  $m_2$  відповідно. Тоді рівняння обертального руху (1.10) в двох експериментах запишуться в формі

$$I\varepsilon_1 = m_1(g - \varepsilon_1 R)R - M_{mp}, \quad (1.11)$$

$$I\varepsilon_2 = m_2(g - \varepsilon_2 R)R - M_{mp}. \quad (1.12)$$

Прискорення  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , маси  $m_1$ ,  $m_2$  та радіус  $R = d/2$ , де  $d$  – діаметр шківів, вимірюються в процесі експерименту. Тоді рівняння (1.11) і (1.12) є системою рівнянь з двома невідомими  $I$  і  $\vec{M}_{mp}$ , одне з яких ( $\vec{M}_{mp}$ ) можна виключити, якщо відняти перше рівняння від другого. Одержимо рівняння з одним невідомим  $I$

$$I\varepsilon_1 - I\varepsilon_2 = m_1(g - \varepsilon_1 R)R - m_2(g - \varepsilon_2 R)R, \quad (1.13)$$

з якого одержимо розрахункову формулу для моменту інерції тіла

$$I = \frac{g(m_1 - m_2) - R(m_1\varepsilon_1 - m_2\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} R. \quad (1.14)$$

Зауважимо, що у чисельнику цієї формули складова  $g(m_1 - m_2)$  в більшості випадків значно більша за складову  $R(m_1\varepsilon_1 - m_2\varepsilon_2)$ , і тоді розрахункова формула (1.14) набуває більш простого вигляду

$$I = \frac{g(m_1 - m_2)R}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}. \quad (1.15)$$

### Завдання:

- а) дослідити залежність кутової швидкості обертального руху маятника від часу для двох різних вантажів і за цими залежностями визначити кутові прискорення диску та момент інерції маятника;
- б) повторити вимірювання, змінивши момент інерції маятника;
- в) зробити висновки щодо результатів експерименту.

### Порядок виконання роботи

#### Підготовка до вимірювань

1. Підготувати збірний вантаж до дослідження, зібравши його з елементів, маси яких занести до таблиці 1.

Таблиця 1

$m$ , кг	Тип елементів вантажу	Кількість
	Легкий	
	Тяжкий	
	Крюк з лощиною	

2. Виміряти за допомогою штангенциркуля діаметр котушки муфти, обчислити значення її радіуса і занести результат до таблиці 2.

Таблиця 2

$R, \text{ м}$	$l, \text{ м}$	$m, \text{ кг}$	$\varepsilon_i, \text{ рад/с}^2$	$\bar{\varepsilon}, \text{ рад/с}^2$	$\Delta\varepsilon_i, \text{ рад/с}^2$	$I, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$
		$m_1$				
		$m_2$				
		$m_1$				
		$m_2$				

3. Відрегулювати положення тягарців на плечах (стержнях) маятника Обербека, помістивши їх приблизно посередині стержня так, щоб за відсутності зовнішньої дії маятник залишався нерухомим, тобто перебував в стані рівноваги.
4. Виміряти відстань  $l$  від центра мас тягарців до осі маятника і занести результат в таблицю 2.
5. Закріпити вантаж на нитці і намотати нитку на шків муфти одним шаром, виток до витка так, щоб вантаж піднявся майже до рівня шківа. Після цього зафіксувати маятник рукою так, щоб він не міг обертатись.
6. У вікні монітора відкрити програму „L-физика практикум”, в меню програми натиснути пункт „Выбор работы” і у вікні, що відкриється, в наведеному переліку лабораторних робіт натиснути назву „Определение моментов инерции тел”. Після цього, для переходу до вимірів натиснути кнопку «Проведение измерений», що приведе до відкриття вікна виконання лабораторної роботи.

### Проведення вимірювань

7. Натиснути кнопку „Пуск” в меню програми вимірювань і відпустити маятник, який буде розкручуватись з прискоренням, а вантаж буде прискорено рухатись донизу. В процесі розкручування через рівні проміжки часу відбувається вимірювання кутової швидкості обертання шківа (і маятника Обербека) за допомогою датчика кутової швидкості.
8. Зупинити обертання маятника після розмотування всієї нитки і натиснути кнопку ”Стоп” меню. Дані вимірювання будуть зображені на екрані монітора у вигляді точок на площині в координатах: вісь абсцис  $X$  (час  $t$ ) – вісь ординат  $Y$  (кутова швидкість  $\omega$ ).
9. Унаслідок неточності балансування тягарців на стержнях маятника, випадкових невеликих поштовхів, зсувів нитки, руху вантажу після розмотування нитки, загалом рух вантажу не є строго рівноприскореним, тому необхідно провести попередню обробку результатів вимірювань. Для цього необхідно, утримуючи ліву кнопку миші натиснутою, виділити рамкою ділянку графіка, яка більш за все відповідає рівноприскореному руху вантажу. Потім натиснути кнопку меню «Обработка».

10. Натиснення кнопки „Обработка” приведе до появи вікна з вибраною сукупністю точок. Після цього натиснути кнопку „Прямая” і в вікні буде побудована пряма, що апроксимує експериментальні дані. Окрім того, у верхній частині вікна з’явиться рівняння виду  $\omega = At + B$  та середньоквадратичні відхилення  $\Delta A$  і  $\Delta B$  коефіцієнтів  $A$  і  $B$  відповідно. Значення коефіцієнта  $A$  є числове значення кутового прискорення  $\varepsilon_1$ , а  $\Delta A$  є його середньоквадратичні відхилення  $\Delta \varepsilon_1$ . Виміряні значення занести до таблиці 2.
11. Для визначення випадкових похибок дію пунктів 7-10 повторити 3-5 разів і занести дані до таблиці 2.
12. Змінити масу вантажу приблизно вдвічі, знявши частину елементів набірною вантажу і результуючу масу позначити  $m_2$ . Виконати дії пунктів 3-11.
13. Розрахувати момент інерції за формулою (1.15) і результат занести до таблиці 2.
14. Зсунувши тягарці майже до муфти, змінити момент інерції маятника і виконати дії пунктів 3-13. Результати занести до таблиці 2. Зробити висновки щодо експериментального визначення моменту інерції і співвідношень обертового руху, що підлягали перевірці.

### Контрольні питання

1. Дайте визначення обертового руху.
2. Чому для опису обертового руху використовують не силу і імпульс, а їх моменти?
3. Дайте визначення моменту сили відносно точки та відносно осі.
4. Дайте визначення моменту інерції матеріальної точки та тіла відносно осі обертання.
5. Яку властивість тіла характеризує момент інерції?
6. Наведіть вирази для моментів інерції найпростіших симетричних тіл (стержня, диска, кулі) відносно їх осі симетрії.
7. Дайте визначення моменту імпульсу відносно точки та осі.
8. Запишіть основне рівняння обертового руху.
9. Як визначається момент сили, який приводить до обертання маятник Обербека?
10. Як залежить момент інерції маятника Обербека від розташування вантажів на стержнях?
11. Який хід виконання лабораторної роботи?

### Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т. Загальний курс фізики: Т.1.: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.: Техніка, 1999. – 269с., ст. 32-48, 57-61, 86-98.